Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 12 settembre 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right], \quad \forall n \geq 1.$$

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,\log(1+3\,\sin^2 x) - \sin^2 3x}{x^4}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log|e^{2x-3} - 1|,$$

a) determinare il suo campo di esistenza e gli intervalli dove è positiva o negativa;

b) determinare il comportamento agli estremi del campo di esistenza ed eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

e) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare

$$\int_8^{27} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\; dx$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right], \quad \forall n \geq 1.$$

Svolgimento.

Per $n = 1$ è banalmente vera: $\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$.
Verifichiamo l'induttivitá della propostizione.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} <$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$< \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + \frac{1}{(n+2)^3}$$

Otteniamo la tesi se proviamo che

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + \frac{1}{(n+2)^3} < \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right],$$

ovvero

$$-\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} < -\frac{1}{2(n+2)^2} \iff \frac{1}{(n+2)^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right] < \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Da questa con elementari calcoli

$$(n+1)^2(n+3) < (n+2)^3 \iff 0 < n^2 + 5n + n,$$

che è sempre verificata perchè $n \geq 1$.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\,\log(1 + 3\,\sin^2 x) \; - \; \sin^2 3x}{x^4}.$$

Svolgimento.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite, otteniamo

$$\log(1 + 3t) = 3t - \frac{3}{2}\,t^2 + o(t^2).$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\sin^2 3x = \left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 9x^2 - 27\,x^4 + o(x^4)$$

Sostituiamo nello sviluppo del logaritmo visto sopra.

$$3\,\log(1 + 3\,\sin^2 x) = 3\,\log\left[1 + 3\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\right] =$$

$$= 3\left[3\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{27}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\right] =$$

$$= 9x^2 + \frac{25}{2}\,x^4 + o(x^4)$$

Quindi

$$3\,\log(1 + 3\,\sin^2 x) - \sin^2 3x = \frac{79}{2}\,x^4 + o(x^4).$$

Il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,\log(1 + 3\,\sin^2 x) - \sin^2 3x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{79}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{79}{2}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log|e^{2x-3} - 1|,$$

a) determinare il suo campo di esistenza e gli intervalli dove è positiva o negativa;

b) determinare il comportamento agli estremi del campo di esistenza ed eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

e) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato da $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ che viene provato imponendo la condizione che l'argomento del logaritmo sia diverso da zero :

$$e^{2x-3} - 1 \neq 0 \iff e^{2x-3} \neq 1 \iff 2x - 3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{2}.$$

La funzione risulta positiva per i valori di x tali che

$$|e^{2x-3} - 1| > 1$$

che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} e^{2x-3}-1>0 \\ \\ e^{2x-3}-1>1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} e^{2x-3}-1<0 \\ \\ 1-e^{2x-3}>1 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni mentre il primo è verificato per $x > \dfrac{3+\log 2}{2}$.
Comportamento agli estremi del campo di esistenza.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0, \quad \lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette un asintoto obliquo $y = mx+q$, per x che tende a $+\infty$. Applichiamo il Teorema di Hospital:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log|e^{2x-3}-1|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{2x-3}-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{2x-3}-1}e^{2x-3}=2.$$

$$q=\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\log(e^{2x-3}-1)-2x=\lim_{x\to+\infty}\log\left[e^{2x-3}\left(1-\frac{1}{e^{2x-3}}\right)\right]-2x=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log e^{2x-3}+\log\left(1-\frac{1}{e^{2x-3}}\right)-2x\right]=-3.$$

La funzione ammette come asintoto per x che tende a $+\infty$ la retta di equazione

$$y=2x-3.$$

Possiamo scrivere esplicitare il modulo contenuto nell'espressione che definisce la funzione nel modo che segue

$$f(x) = \begin{cases} \log(e^{2x-3} - 1), & x > \dfrac{3}{2} \\ \\ \log(1 - e^{2x-3}), & x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi la sua derivata è

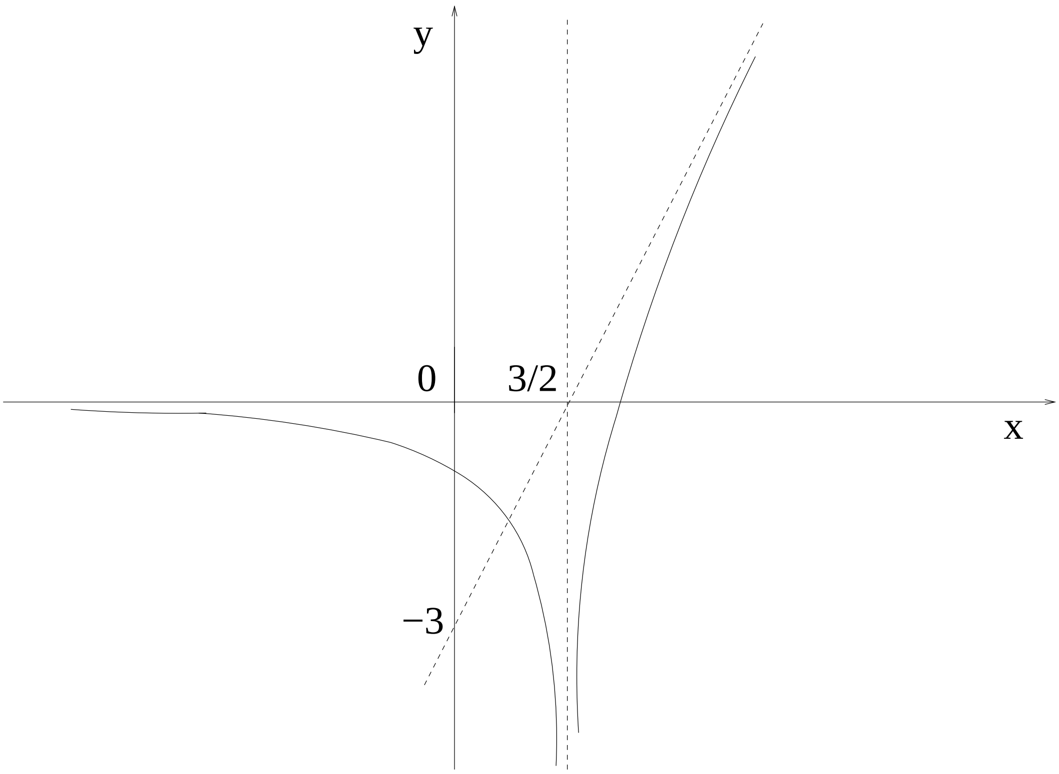
$$f'(x) = \frac{2e^{e^{2x-3}}}{e^{2x-3} - 1}, \quad x \neq \frac{3}{2}.$$

Risulta $f'(x)>0$ se $e^{2x-3}-1>0$, ovvero per $e^{2x-3}>1$, $x>\dfrac{3}{2}$. Analogamente $f'(x)<0$ per $x<\dfrac{3}{2}$. La funzione è monotona crescente per $x>\dfrac{3}{2}$, decrescente per $x<\dfrac{3}{2}$.

Osserviamo invece che per quanto riguarda la derivata seconda risulta

$$f''(x) \;=\; -\,\frac{4e^{e^{2x-3}}}{(e^{2x-3}\;-\;1)^2}\;<\;0, \quad \forall x \neq \frac{3}{2},$$

Quindi f è concava su $\left(-\infty,\;\frac{3}{2}\right)$ e su $\left(\frac{3}{2}\,,\,+\infty\right)$.
Tenuto conto di quanto visto, possiamo tracciare il seguente grafico.



4. (punti 8) Calcolare

$$\int_8^{27} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\;dx$$

Svolgimento.

Effettuiamo il cambio di variabile $x = t^3$, quindi $dx = 3t^2\,dt$. In questo modo l'integrale da calcolare diventa

$$\int_8^{27} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\;dx \;=\; \int_2^3 3\,\frac{e^{t^2}}{t}\,t^2\;dt \;=\; \frac{3}{2}\int_2^3 2t\,e^{t^2}\;dt \;=\; \frac{3}{2}\left[e^{t^2}\right]_2^3 = \frac{3}{2}\,(e^9\;-\;e^4).$$