LIMITI DI FUNZIONI DEFINITE IN $\mathbb{R}^n$

Dire se esistono i seguenti limiti e calcolarne eventualmente il valore.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{y^2+x}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{y \operatorname{sen} x}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{|x|+|y|}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ 7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x^4\,y^2}{x^4\,y^2}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x^4y^2}{x^4+y^2}$ 9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^4}-1}{x^2+y^4}$

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^4}-1}{x^4\,y^4}$ 11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^4}-1}{|x\,y|}$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\sqrt{|xy|}}{x^2+xy+y^2}$

13) Siano : $A_1 = \{(x,y): \lambda_1 x \le y \le \lambda_2 x, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty\}$,

$A_2 = \{x,y): x > 0 \;,\; y > 0\}$,

$f(x,y) = \dfrac{x^5+y^5}{x^2y^2}$, calcolare:

13a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{su } A_1}} f(x,y)$, 13b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{su } A_2}} f(x,y)$

14) Siano : $A_1 = \{(x,y): y \ge \lambda\,|x| \;,\; \lambda > 1\}$,

$A_2 = \{(x,y): y > |x|\ \}$,

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{y^2-x^2}$, calcolare:

14a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{su } A_1}} f(x,y)$ 14b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{su } A_2}} f(x,y)$

RISPOSTE E SUGGERIMENTI

1) $\mathcal{R}$.:non esiste. Sulle rette $y=\lambda x$ si ha : $\dfrac{x+\lambda}{\lambda^2x^2+1} \longrightarrow \lambda$ per $x\to 0$.

2) $\mathcal{R}$.:1

3) $\mathcal{R}$.:non esiste. Infatti: sulle rette $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, la funzione tende a $1/\lambda$ per $x \to 0$.

4) $\mathcal{R}$.:0. Segue dalla maggiorazione $xy \le \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \le \dfrac{1}{2}(|x|+|y|)^2$.

5) $\mathcal{R}$.:0. Perchè : $x^2y^2 \le \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2$

6) $\mathcal{R}$.:0. Perchè : $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$

7) $\mathcal{R}$.:1. Porre $x^4y^2 = t$, per $(x,y) \to 0$, $t\to 0^+$.

8) $\mathcal{R}$.:0.

9) $\mathcal{R}$.:1. Porre $x^2+y^4 = t$.

10) $\mathcal{R}$.:$+\infty$. Perché in un intorno di (0,0) risulta: $\dfrac{x^2+y^4}{x^4y^4} \ge \dfrac{4}{x^4+y^4}$

11) $\mathcal{R}$.:non esiste. Sulle rette $y=\lambda x$, $\lambda\neq 0$, la funzione tende a $\dfrac{1+\lambda^2}{|\lambda|}$ per

per $x\to 0$.

12) $\mathcal{R}$.:0 . Distinguere $|x|>|y|$ e $|x|\le|y|$, osservare che $x^2+xy+y^2 \ge x(x+y)$ oppure $x^2+xy+y^2 \ge y(x+y)$.

13a) $\mathcal{R}$.:0 . 13b) $\mathcal{R}$.: non esiste, passare al limite su $y = x^\alpha$.

14a) $\mathcal{R}$.:0 . 14b) $\mathcal{R}$.: non esiste, passare al limite su $y = x - x^2$.