Formula di riduzione degli integrali tripli

Sia A insieme normale rispetto all'asse z:

$$A = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B ,\ \beta(x,y) \leq z \leq \alpha(x,y) \}$$

dove:

$B \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile.

$\alpha, \beta \in C^0(B)$, $\beta \leq \alpha$.

Sia $f \in C^0(A)$, A è misurabile e f integrabile, e vale:

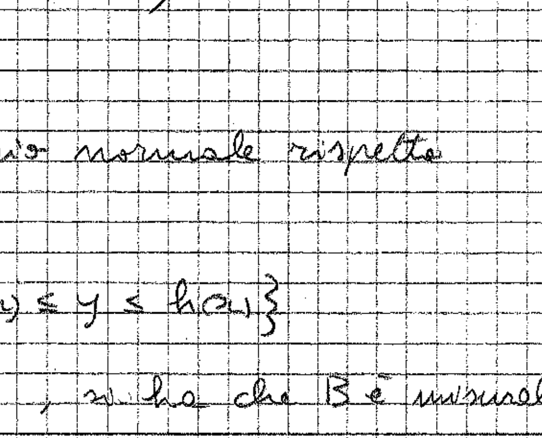
$$\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_B \left(\int_{\beta(x,y)}^{\alpha(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy .$$

Nel caso in cui B sia ad esempio normale rispetto all'asse y, cioè:

$$B = \{ (x,y) : a \leq x \leq b ,\ g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

dove h, g sono integrabili su $[a,b]$, si ha che B è misurabile e vale:

$$\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\beta(x,y)}^{\alpha(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$



Esempio 1

Calcolare:

$$\int_{B^+(1)} xyz\, dx\, dy\, dz$$

dove:

$$B^+(1) = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1 ,\ x \geq 0 ,\ y \geq 0 ,\ z \geq 0 \}$$

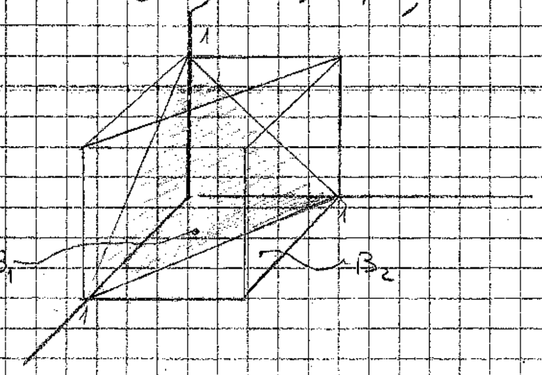
È evidente che $B^+(1)$ si può esprimere come insieme normale rispetto all'asse z nel modo seguente:

$$B^+(1) = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B ,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \}$$

dove:
$$B=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$$
ma anche B si può esprimere come insieme normale (di $\mathbb{R}^2$) rispetto all'asse y:
$$B=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$$
Quindi applicando la formula di riduzione degli integrali tripli:
$$\int_{B^+(1)} xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz =$$
$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz =$$
$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\,dy =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 (1-x^2)^2 x\,dx = -\frac{1}{48}\left[(1-x^2)^3\right]_0^1 = \frac{1}{48}$$

Esempio 2

Calcolare
$$\int_A xy\,dx\,dy\,dz$$
dove $A=\{(x,y,z): x+y+z\geq 1, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1\}$



Possiamo porre $A = A_1 \cup A_2$ dove:

$$A_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in B_1 , 1-x-y \le z \le 1\}$$

con $B_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 1-x\}$

$$A_2 = \{(x,y,z) : (x,y) \in B_2 , 0 \le z \le 1\}$$

con $B_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 , 1-x \le y \le 1\}$

Da cui:

$$\int_A xy \, dx\, dy\, dz = \int_{A_1} xy \, dx\, dy\, dz + \int_{A_2} xy \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{1-x-y}^1 xy \, dz + \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \int_0^1 xy \, dz =$$

$$= \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} y\, dy\, (x+y) + \int_0^1 x\, dx \int_{1-x}^1 y\, dy =$$

$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{1-x} dx + \int_0^1 x \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^{1-x} dx + \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{1-x}^1 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3 x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x - x(1-x)^2 \, dx = \text{-----}$$

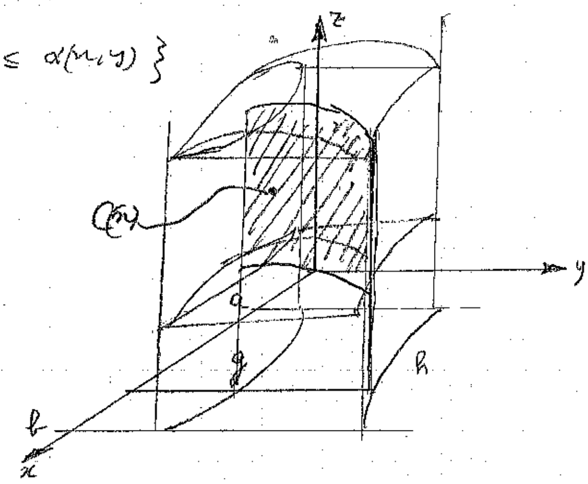
Siano A normale rispetto all'asse z e B normale rispetto all'asse y. Vale la seguente formula di riduzione:

Posto:

$$A = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B,\ \beta(x,y) \le z \le \alpha(x,y) \}$$

$$B = \{ (x,y) : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \}$$

$$C(x) = \{ (y,z) : g(x) \le y \le h(x),\ \beta(x,y) \le z \le \alpha(x,y) \}$$

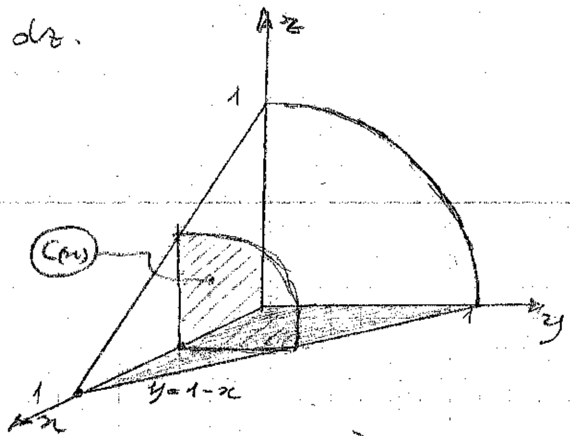


si ha:

$$\iint_{C(x)} f(x,y,z)\, dy\, dz = \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\beta(x,y)}^{\alpha(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

Quindi

$$\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{C(x)} f(x,y,z)\, dy\, dz.$$



Esempio: calcolare

$$\int_A z\, dx\, dy\, dz$$

dove $A = \{ (x,y,z) : 0 \le x \le -\sqrt{y^2+z^2} + 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \}$.

Poniamo: $C(x) = \{ (y,z) : 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le \sqrt{(x-1)^2 - y^2} \}$

Quindi:

$$\int_A z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_{C(x)} z\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\sqrt{(x-1)^2-y^2}} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x-1)^2 - y^2 \right] dy = \int_0^1 \left[(x-1)^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3\, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{12}$$

Misure di insiemi di rotazione

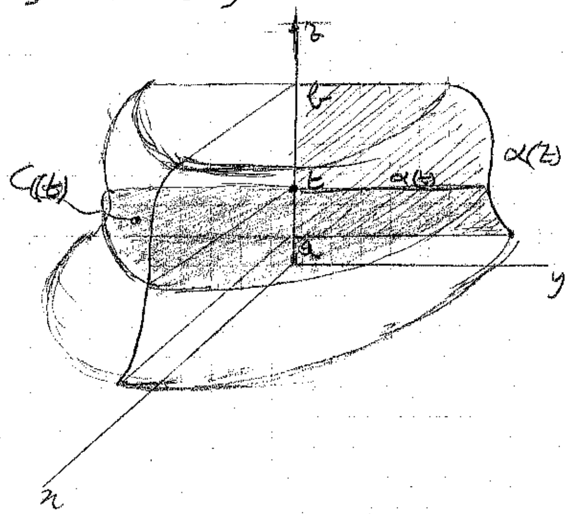
Sia B' l'insieme del piano (y,z) normale rispetto a y

$$B' = \{(y,z) : \; a \le z \le b \;, \; 0 \le y \le \alpha(z)\}$$

(dove $\alpha \in C^0([a,b])$)

L'insieme di rotazione attorno all'asse z generato da B' è definito da: (vedi equazioni superfici di rotazione, cap. prec)

$$A = \{(x,y,z) : \; a \le z \le b, \;\; 0 \le x^2+y^2 \le \alpha^2(z)\}$$



[A è misurabile, infatti:

poniamo

$$B = \{(y,z) ; a \le z \le b, \; -\alpha(z) \le y \le \alpha(z)\}$$

B è misurabile perchè normale rispetto all'asse y.

A si può anche scrivere:

$$A = \{(x,y,z) : \; (y,z) \in B \;, -\sqrt{\alpha^2(z)-y^2} \le x \le \sqrt{\alpha^2(z)-y^2}\}$$

A è misurabile perchè normale rispetto all'asse x.

Per calcolare mis A si osserva che se $C(t)$ è l'intersezione del piano parallelo al piano (x,y) con $z=t$ con A, allora

$$\text{mis } A = \int_A 1 \, dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \int_{C(z)} 1 \; dx\,dy = \int_a^b \text{mis } C(z) \; dz$$

ma $C(z)$ è uno disco di centro $(0,0)$ e raggio $\alpha(z)$, quindi

$$\text{mis } C(z) = \pi\,[\alpha(z)]^2$$

da cui

$$\text{mis } A = \pi \int_a^b [\alpha(z)]^2 \, dz.$$

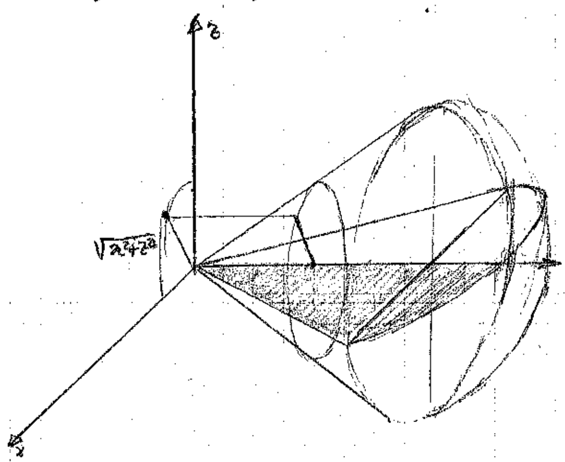
Esempio

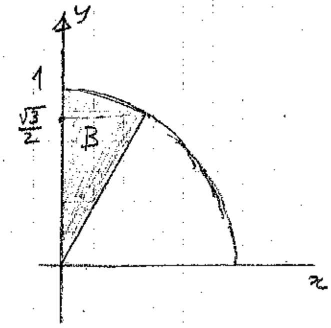
Calcolare la misura del solido ottenuto ruotando $\{(y,z) : \; 0 \le z \le \pi \;, \;\; 0 \le y \le \operatorname{sen} z\}$ attorno all'asse z.

$$\text{mis } A = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 z \, dz = \frac{\pi^2}{2}$$

2) Calcolare la misura del solido A ottenuto facendo ruotare l'insieme B attorno all'asse y.

$$B=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 1\ ,\quad 0\le \sqrt{3}x\le y\}$$





$$A=\left\{(x,y,z)\ :\ 0\le y\le \frac{\sqrt3}{2}\quad e\quad 3(x^2+z^2)\le y^2\right\}\cup$$

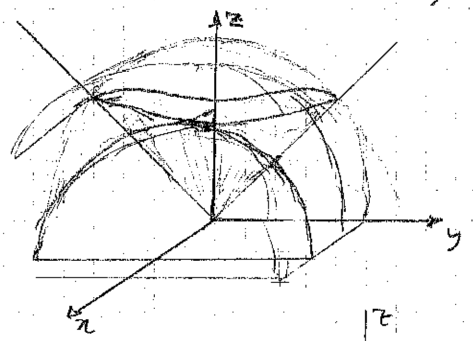
$$\cup\left\{(x,y,z)\ :\ \frac{\sqrt3}{2}\le y\le 1\quad e\quad x^2+z^2\le 1-y^2\right\}$$

$$\text{mis}\,A=\pi\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{y^2}{3}\,dy+\pi\int_{\frac{\sqrt3}{2}}^1(1-y^2)\,dy=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{9}y^3\right]_0^{\frac{\sqrt3}{2}}+\pi\left[y-\frac13 y^3\right]_{\frac{\sqrt3}{2}}^1=\pi\left(\frac{3\sqrt3}{3\cdot 24}+1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac13+\frac{3\sqrt3}{3\cdot 8}\right)=\pi\left(\frac23-\frac{\sqrt3}{3}\right)$$

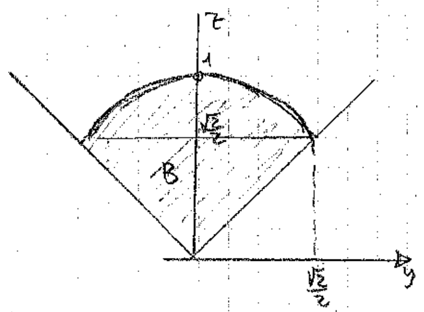
3) Calcolare l'integrale:

$$\int_A yz\,dx\,dy\,dz$$



dove:

$$A=\left\{(x,y,z)\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-y^2}\right\}$$



Possiamo scrivere A nel seguente modo:

$$A=\left\{(x,y,z)\ :\ -\sqrt{z^2-y^2}\le x\le\sqrt{z^2-y^2}\ ,\ (y,z)\in B\right\}$$

con

$$B=\{(y,z)\ :\ z^2+y^2\le 1\ ,\quad |y|\le z\}=B_1\cup B_2$$

dove

$$B_1=\left\{(y,z):\quad |y|\le z\quad e\quad 0\le y\le\frac{\sqrt2}{2}\right\}$$

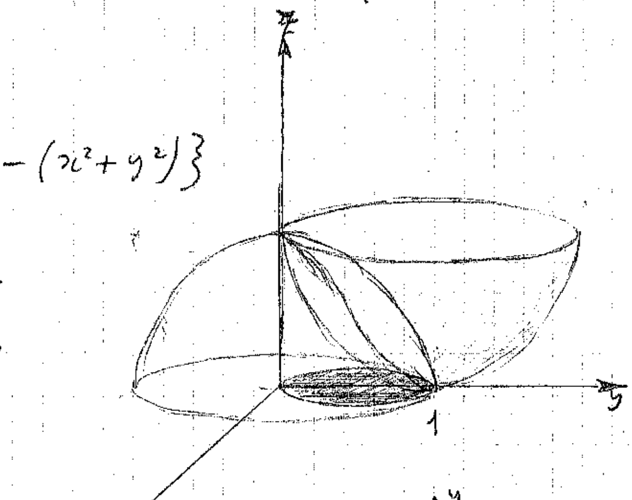
$$B_2=\left\{(y,z)\ :\quad z^2+y^2\le 1\quad e\quad \frac{\sqrt2}{2}\le z\le 1\right\}$$

Quindi:

3) Calcolare l'integrale

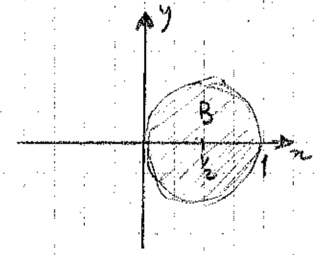
$$\int_A x \, dx\, dy\, dz$$

dove $A = \{(x,y,z) : x^2 + (y-1)^2 \le z \le 1 - (x^2+y^2)\}$



Calcoliamo la proiezione sul piano dell'intersezione tra i due paraboloidi.

$$\begin{cases} z = 1 - (x^2+y^2) \\ z = x^2 + (y-1)^2 \end{cases}$$



$\cancel{1} - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + \cancel{1} - 2y$

$2x^2 + \cancel{2}y^2 - \cancel{2}y = 0$

$x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ cioè : $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

posto $B = \{(x,y) : x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\}$, A si può scrivere:

$A = \{(x,y,z) : (x,y) \in B ; x^2 + (y-1)^2 \le z \le 1 - (x^2+y^2)\}$, da cui:

$$\int_A x \, dx\, dy\, dz = \int_B x \, dx\, dy \int_{x^2+(y-1)^2}^{1-x^2-y^2} dz = \int_B (2y - 2x^2 - 2y^2)\, x \, dx\, dy =$$

$$= 2\int_0^1 x\, dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} (y - x^2 - y^2)\, dy = 2\int_0^1 x \left[\frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{3}y^3\right]_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dx = \ldots$$

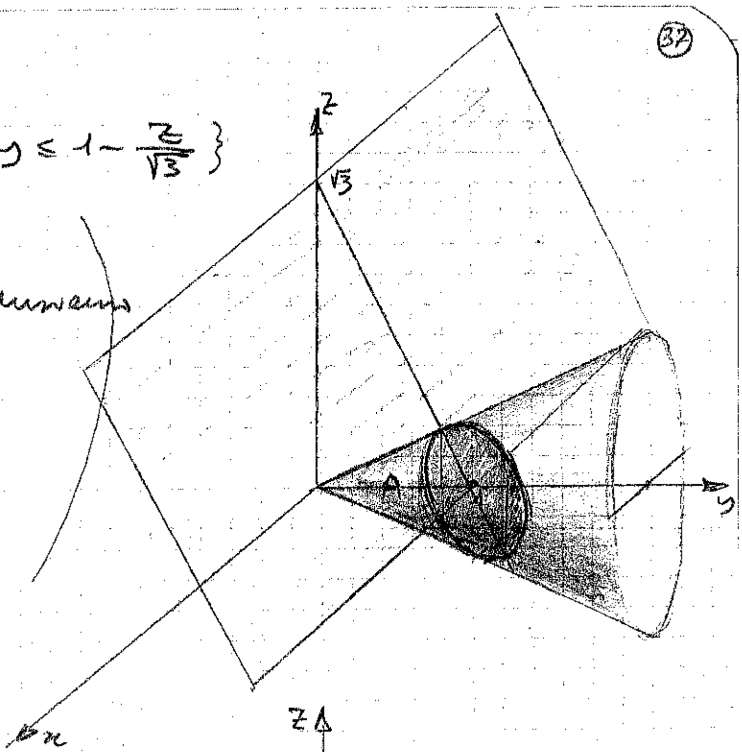
$$\int_A yz \, dx\, dy\, dz = \int_B zy \, dy\, dz \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx = 2\int_B \sqrt{z^2-y^2}\, zy \, dz\, dy = \int_{B_1} \dots + \int_{B_2} \dots =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\, dy \int_{|y|}^{\sqrt{1-y^2}} z \sqrt{z^2-y^2}\, dz\, dy = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \left[(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{|y|}^{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\left(1-y^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\left(1-2y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{15}$$

Calcolare : mis A dove

$$A = \left\{ (x,y,z) : \sqrt{3}\, \sqrt{x^2+z^2} \le y \le 1 - \frac{z}{\sqrt{3}} \right\}$$

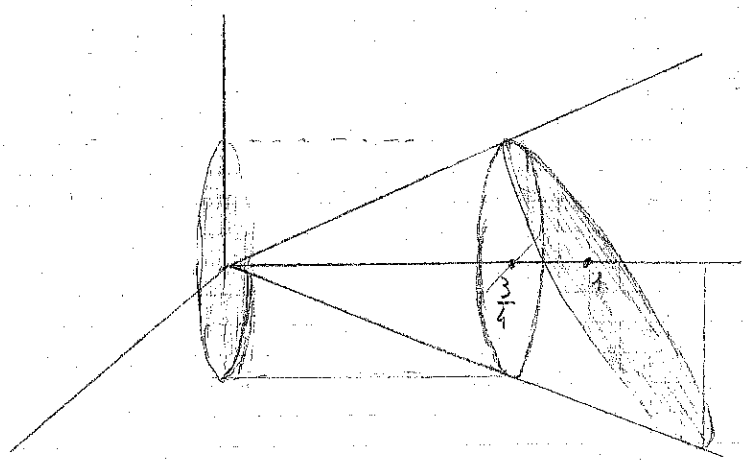


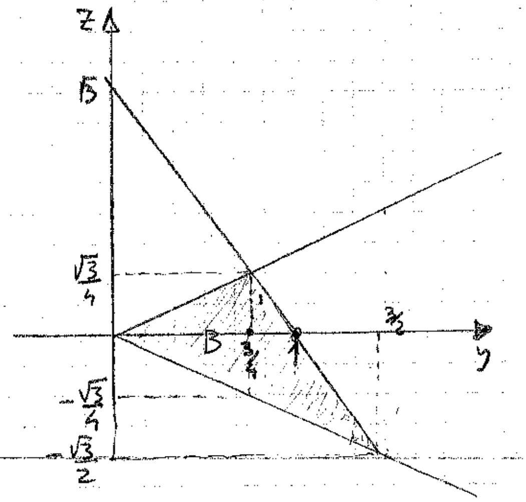
A può essere visto come unione dei seguenti sottoinsiemi

$$A_1 = \left\{ (x,y,z) : \sqrt{3}\, \sqrt{x^2+z^2} \le y \le \frac{3}{4} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x,y,z) : \frac{3}{4} \le y \le 1 - \frac{z}{\sqrt{3}} \right\}$$

non serve





Proviamo

$$B = \left\{ (y,z) : \sqrt{3}|z| \le y \le 1 - \frac{z}{\sqrt{3}} \right\}$$

Quindi:

$$\text{mis } A = \int_B dy\, dz \int_{-\sqrt{\frac{y^2}{3} - z^2}}^{\sqrt{\frac{y^2}{3} - z^2}} 1 \, dx = \int_B \sqrt{\frac{y^2}{3} - z^2}\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} dz \int_{\sqrt{3}|z|}^{3/4} \sqrt{\frac{y^2}{3} - z^2}\, dy + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dz \int_{3/4}^{1 - \frac{z}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{y^2}{3} - z^2}\, dy = \dots\dots$$