Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2

Prova scritta del 23 Febbraio 2015

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Calcolare il valore dell'integrale

$$\iint_D x^3\, y\ dx\, dy,$$

dove $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 6,\ 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x\}$.

2. (Punti 8) Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; 4y^2 \;-\; 5xy$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) :\ \ 2x^2 \;+\; 8\,y^2 \leq 1\}.$$

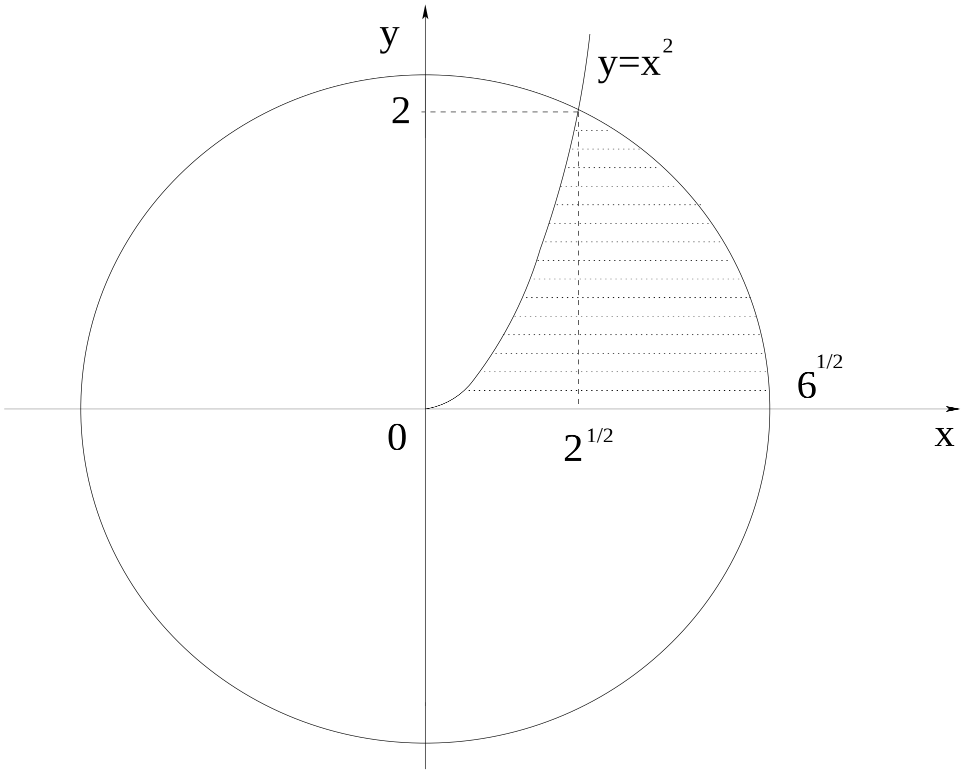
3. (Punti 8) Calcolare l'area della superficie Σ individuata dall'equazione parametrica seguente

$$\begin{cases} x(t,\theta) \;=\; t\,\cos\theta \\ y(t,\theta) \;=\; t\,\sin\theta\ , \qquad t \in [1,2],\ \ 0 \,\leq\, \theta \,\leq\, \dfrac{\pi}{4}. \\ z(t,\theta) \;=\; t \end{cases}$$

4. (Punti 8) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; \dfrac{2 + [u(t)]^4}{[u(t)]^3}\,\dfrac{1}{1+t} \\ u(0) \;=\; 1 \end{cases}$$

Risoluzione degli esercizi proposti.



Esercizio 1. Il dominio dato è descritto da due disequazioni, la prima individua i punti di un disco di raggio $\sqrt{6}$, la seconda dai punti del piano posti sotto la parabola di equazione $y = x^2$ nel semipiano delle y non negative, con $x \geq 0$. Intersecando le due regioni otteniamo D (vedi figura); questo insieme è semplice rispetto all'asse y ma la parte che limita D dall'alto è unione dei grafici di due funzioni: $y = \sqrt{6 - x^2}$ e $y = x^2$. Determiniamo la loro intersezione svolgendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = x^2 \end{cases}.$$

Le soluzoni sono $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $y_1 = 2$ e $y_2 = -3$. L'unico punto che cade nel dominio D è $(\sqrt{2}, 2)$. Tenuto conto di questo possiamo scomporre $D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \ 0 \leq y \leq x^2\}, \ D_2 = \{(x, y) : \ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}, \ 0 \leq y \leq \sqrt{6 - x^2}\}.$$

Da questo segue

$$\begin{aligned}
\iint_D x^3\, y\; dx\, dy \;=\; & \iint_{D_1} x^3\, y\; dx\, dy \;+\; \iint_{D_2} x^3\, y\; dx\, dy \;= \\
=\; & \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2} x^3\, y\, dy \;+\; \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt{6-x^2}} x^3\, y\;\; dy \;= \\
& \int_0^{\sqrt{2}} x^3 \left[\frac{1}{2}\, y^2\right]_0^{x^2} dx \;+\; \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} x^3 \left[\frac{1}{2}\, y^2\right]_0^{\sqrt{6-x^2}} dx \;= \\
=\; & \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} x^7\; dx \;+\; \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} x^3(6-x^2)\; dx \;= \\
& \frac{1}{16}\, \left[x^8\right]_0^{\sqrt{2}} \;+\; \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} (6x^3 - x^5)\; dx \;= \\
=\; & 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\, x^4 \;-\; \frac{1}{6}\, x^6\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \;=\; \frac{23}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determiniamo i punti stazionari interni.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \;=\; 2x - 5y \;=\; 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \;=\; 8y - 5x \;=\; 0 \end{cases}.$$

L'unica soluzione è $(x, y) = (0, 0)$, che è interno al dominio. Cerchiamo punti stazionari sul bordo mediant eil metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinando i punti stazionari della funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) \;=\; x^2 + 4y^2 - 5xy - \lambda(2x^2 + 8y^2 - 1).$$

Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \;=\; 2x - 5y - 4\lambda x \;=\; 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \;=\; 8y - 5x - 16\lambda y \;=\; 0 \\[2ex] 2x^2 + 8y^2 - 1 \;=\; 0 \end{cases}.$$

Ricavando λ dalle prime due equazioni e sostituendo poi nella terza quanto si ottiene

$$\frac{2x - 5y}{4x} = \frac{8y - 5x}{16y} \quad \Longrightarrow x^2 \;=\; 4\, y^2 \;\;\Longrightarrow\;\; 8y^2 + 8y^2 = 1.$$

Si osservi che è possibile dividere per x e y perchè se $x = 0$ dalla prima equazione segue $y = 0$; ma $(0, 0)$ non risolve la terza equazione. Stesso discorso per la divisione per y.

Da cui $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}, \quad y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{4}$. Calcoliamo il valore della funzione in ciascuno di questi punti

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}, \; f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}, \text{ (minimo)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}, \; f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}, \text{ (massimo)},$$

$f(0,0) = 0$ (minimo).

Esercizio 3. Applichiamo la formula dell'area ponendo $\mathbf{r}(t,\theta) = (x(t,\theta), y(t,\theta), z(t,\theta))$

$$area\ \Sigma = \iint_\Sigma dS = \iint_T |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta| \, dt \, d\theta.$$

Posto $T = \{(t,\theta) : \; 1 \leq 2, \; 0 \leq \frac{\pi}{4}\}$, risulta

$$area\ \Sigma = \iint_\Sigma dS = \sqrt{2} \iint_T \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho \, d\rho \, d\theta = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2 \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{3}{8}\,\pi.$$

Esercizio 4. L'equazione considerata è non lineare del tipo a variabili separabili. Portiamo al primo membro il termine contenente $u(t)$ osservando che $2 + [u(t)]^4 \neq 0$:

$$\frac{[u(t)]^3}{2 + [u(t)]^4} \, u'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Intergiamo membro:

$$\int_0^t \frac{[u(s)]^3}{2 + [u(s)]^4} \, u'(s) \, ds = \int_0^t \frac{1}{1+s} \, ds.$$

Nell'integrale al primo membro cambiamo variabile ponendo $\tau = u(s)$, $d\tau = u'(s)\,ds$, per $s = 0$ $u(0) = 1$:

$$\frac{1}{4} \int_1^{u(t)} \frac{4\tau^3}{2+\tau^4} \, d\tau = [\log(1+s)]_0^t = \log|1+t|.$$

Al primo membro:

$$\frac{1}{4} \left[\log(2+\tau^4)\right]_1^{u(t)} = \frac{1}{4} \left\{\log(2 + [u(t)]^4) - \log 3\right\}.$$

Uguagliamo i risultati del primo ed del secondo membro

$$\log(2 + [u(t)]^4) - \log 3 = \log(1+t)^4 \iff \frac{2 + [u(t)]^4}{3} = (1+t)^4.$$

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt[4]{3\,(1+t)^4 - 2}.$$