Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2

Prova scritta del 16 Giugno 2015

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(1) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\iiint_D x\ y\ \ dx\,dy\,dz,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) : \ \ 1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 33 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ z \geq 0\}.$$

(**2**) (Punti 8) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t)\ -\ 4\,u(t)\ =\ 10\,e^{3t}\ +\ 21e^{5t} \\ u(0) = 5 \\ u'(0) = 15 \end{cases}$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x, y)\ =\ \frac{4}{3}x^3\ -\ 16\,x\ -\ y\ +\ \frac{y^3}{3}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

determinare, se esistono, i punti di massimo o di minimo relativo e dire se sono anche assoluti.

(4) (Punti 8) Verificare che la funzione

$$F(x, y) = x^5\ +\ 5y^3\ +\ 2x^2\ +\ x\ +\ y$$

soddisfa le ipotesi del *teorema del Dini* nel punto $(0, 0)$ e tracciare il grafico approssimato dell'insieme degli zeri in un intorno di esso.

Risoluzione degli esercizi proposti.

(1) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\iiint_D x\ y\ \ dx\, dy\, dz,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) :\ \ 1 + x^2 + y^2 \le z \le 33 - x^2 - y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\, z \ge 0\}.$$

Svolgimento.

Il dominio di integrazione è la parte di spazio compresa tra i due paraboloidi di rotazione $z = 1 + x^2 + y^2$ e $z = 33 - x^2 - y^2$ aventi come asse l'asse z. La loro intersezione si trova risolvendo l'equazione $1 + x^2 + y^2 = 33 - x^2 - y^2$, ovvero si tratta della circonferenza $x^2 + y^2 = 16$.

Passando alle coordinate cilindriche otteniamo l'integrale

$$\iiint_E \rho^2\ \cos\theta\ \sin\theta\, t\ \rho\ d\theta\, d\,\rho\, dt.$$

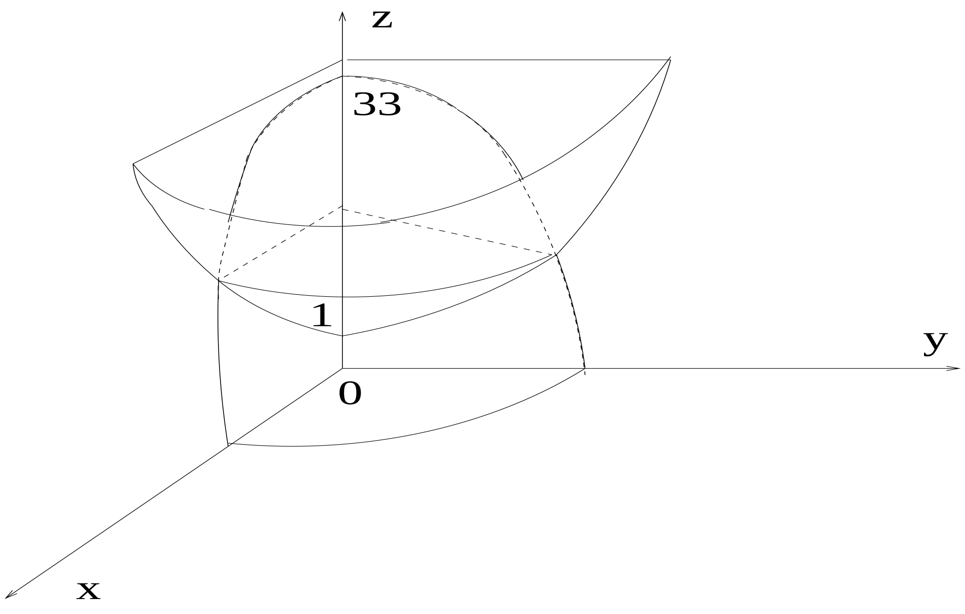
Poichè

$$E = \{(\theta,\ \rho,\ t) :\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 < \rho \le 4,\ \ 1 + \rho^2 \le t \le 33 - \rho^2\},$$

possiamo scrivere

$$\iiint_E \rho^2\ \cos\theta\ \sin\theta\, t\ \rho\ d\theta\, d\,\rho\, dt\ =\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 d\rho \int_{1+\rho^2}^{33-\rho^2} \rho^3\ \cos\theta\ \sin\theta\, t\ dt\ =$$

$$=\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\ \ d\theta \int_0^4 \rho^3\, [t]_{1+\rho^2}^{33-\rho^2}\ \ d\rho\ \ =\ 16[\sin^2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho^3\ \ d\rho\ =\ 1024.$$



Esercizio 2.
Determiniamo una base dello spazio vettoriale V_0 delle soluzioni dell'equazione omogenea con il metodo del polinomio caratteristico, ovvero risolvendo

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Otteniamo le radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$ e quindi

$$V_0 = \{C_1\, e^{2t} + C_2 e^{-2t},\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Per determinare una soluzione particolare della non omogenea osserviamo che il secondo membro è somma di due esponenziali il cui argomento è del tipo αt con α diverso dalle radici del poliniomio caratteristico. Possiamo quindi cercare una soluzione del tipo

$$u_f = A\, e^{3t} + B\, e^{5t},\quad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Tenuto conto del fatto che

$$u_f' = 3A\, e^{3t} + 5B\, e^{5t},\quad u_f'' = 9A\, e^{3t} + 25B\, e^{5t}$$

Possiamo sostituire nell'equazione

$$9A\, e^{3t} + 25B\, e^{5t} - 4A\, e^{3t} - 4B\, e^{5t} = 10\, e^{3t} + 21\, e^{5t} \quad \Longleftrightarrow \quad 5A\, e^{3t} + 21B\, e^{5t} = 10\, e^{3t} + 21\, e^{5t},$$

eguagliamo gli esponenziali con lo stesso argomento:

$$5A\, e^{37} = 10\, e^{3t},\quad 21B\, e^{5t} = 21\, e^{5t}$$

ed otteniamo

$$A = 2,\ \ B = 1.$$

Di conseguenza l'insieme V_f delle soluzioni dell'equazione data è

$$V_f = \{C_1\, e^{2t} + C_2 e^{-2t} + 2e^{3t} + e^{5t},\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\ \}$$

Imponiamo che la soluzione u verifichi le condizioni iniziali dopo aver calcolato u'

$$u'(t) = 2C_1\, e^{2t} - 2\, C_2 e^{-2t} + 6e^{3t} + 5\, e^{5t},$$

essendo quindi

$$u'(0) = 2C_1 - 2C_2 + 11, \qquad u(0) = C_1 + C_2 + 3$$

risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2C_1 - 2C_2 + 11 = 15 \\ C_1 + C_2 + 5 = 5 \end{cases}$$

da cui $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. In definitica la soluzione è:

$$u(t) = 2\, e^{2t} + 2e^{3t} + e^{5t}.$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x,y) \;=\; \frac{4}{3}x^3 \;-\; 16\,x \;-\; y \;+\; \frac{y^3}{3}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

determinare, se esistono, i punti di massimo o di minimo relativo e dire se sono anche assoluti.

Svolgimento.

Calcoliamo il gradiente della funzione:

$$\nabla f(x,y) \;=\; (4x^2 \;-\; 16,\; y^2 \;-\; 1).$$

Da cui deduciamo che i punti stazionari sono

$$(2,1);\;\; (-2,-1);\;\; (2,-1);\;\; (-2,1).$$

La *matrice hessiana* di f è:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 8x & 0 \\ & \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice nei punti stazionari

$$H(2,1) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ & \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; H(-2,-1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; H(-2,1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ & \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; H(2,-1) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che:
essendo $detH(2,1) > 0$ e $a_{11} > 0$ allora $(2,1)$ è punto di minimo locale;
essendo $detH(-2,-1) > 0$ e $a_{11} < 0$ allora $(-2,-1)$ è punto di massimo locale;
essendo $detH(-2,1) < 0$, $detH(2,-1) < 0$ allora $(-2,1)$ e $(2,-1)$ sono punti di sella.
Il punto $(2,1)$ non è di minimo assoluto perchè f non è limitata inferiormente in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3}x^3 \;-\; 16\,x \;=\; -\infty.$$

Il punto $(-2,-1)$ non è di massimo assoluto perchè f non è limitata superiormente in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3}x^3 \;-\; 16\,x \;=\; +\infty.$$

(4) (Punti 8) Verificare che la funzione

$$F(x,y) = x^5 \;+\; 5y^3 \;+\; 2x^2 \;+\; x \;+\; y$$

soddisfa le ipotesi del *teorema del Dini* nel punto $(0,0)$ e tracciare il grafico approssimato dell'insieme degli zeri in un intorno di esso.

Svolgimento

La funzione data è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre $F(0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \;=\; 15\,y^2 + 1 \;\neq\; 0.$$

Per il *teorema del Dini* esistono gli intorni $V_x(0)$ e $U_y(0)$ ed una unica funzone $f : V_x(0) \longrightarrow U_y(0)$ tali che per ogni $x \in V_x(x)$ risulta

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Per tracciare il grafico di f in un intorno di $x = 0$ calcoliamo le derivate f' e f''.

$$f'(x) \;=\; -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \;=\; -\,\frac{5x^4 + 4x + 1}{15y^2 + 1} \;=\; -\,\frac{5x^4 + 4x + 1}{15[f(x)]^2 + 1}..$$

$$f''(x) \;=\; -\,\frac{(20x^3 + 4)(15[f(x)]^2 + 1) - ((5x^4 + 4x + 1)30f(x)f'(x)}{(15[f(x)]^2 + 1)^2}.$$

Tenuto conto che $f(0) = 0$, otteniamo che $f'(0) = -1$ e $f''(0) = -4$.
Possiamo quindi tracciare il seguente grafico.