Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2

Prova scritta del 16 Gennaio 2015

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(1) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\; dx\,dy\,dz,$$

dove

$$D = \{(x,y,z): \;\; x^2+y^2 \le z \le 1,\; 0 \le y \le x\}$$

(**2**) (Punti 8) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u''(t) \,-\, 12\,u'(t) \,+\, 35\,u(t) \,=\, \sin t$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 \,+\, y^3 \,+\, 5x^2 \,+ 5y^2 \,+\, 8x \,+\, 8y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

determinare, se esistono, i punti di massimo o di minimo relativo e dire se sono anche assoluti.

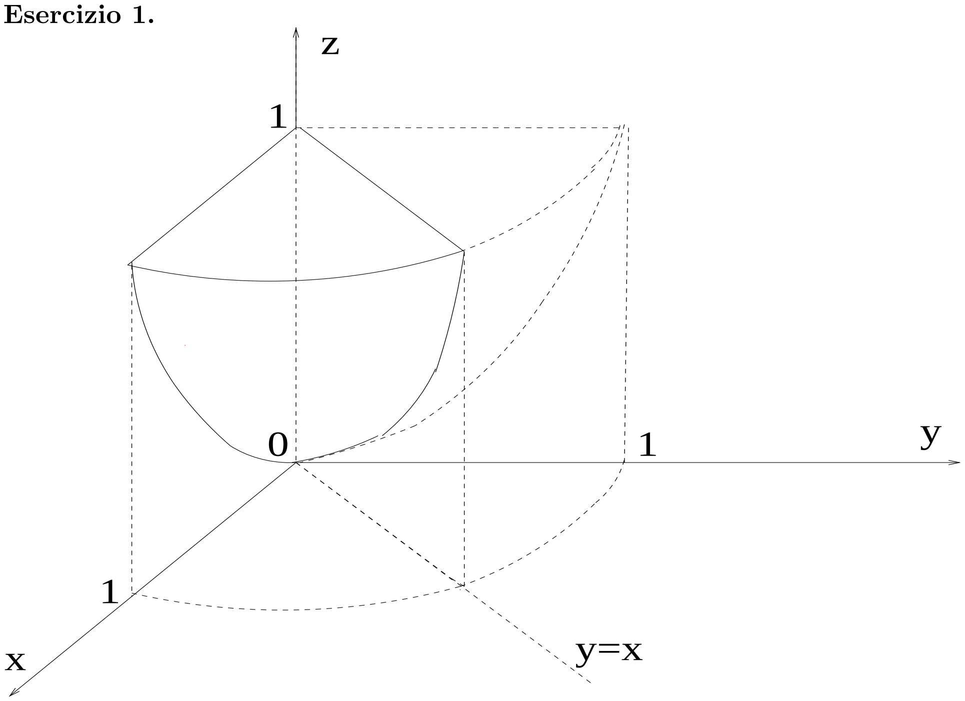
(4) (Punti 8) Verificare che la funzione

$$F(x,y) = x^4 \,+\, 2y^3 \,+\, 2\,y^2 -\, x +\, y$$

soddisfa le ipotesi del *teorema del Dini* nel punto $(0,0)$ e tracciare il grafico approssimato dell'insieme degli zeri in un intorno di esso.

Risoluzione degli esercizi proposti.

Esercizio 1.



Il dominio di integrazione è costituito dallo spicchio di un paraboloide di rotazione avente come asse l'asse z (vedi figura); per questo motivo è conveniente effettuare il cambiamento di coordinate passando in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}.$$

Il nuovo dominio è

$$E = \{(\rho,\,\theta, t) :\ \rho^2 \le t \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\}$$

il determinante dello jacobiano è ρ. Sostituendo:

$$\iiint_D z\,\sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy\,dz\ =\ \iiint_E t\,\rho^2\ d\rho\,d\theta\,dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_{\rho^2}^1 t\,dt = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \rho^2\left[\frac{1}{2}\,t^2\right]_{\rho^2}^1 d\rho =$$

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 \rho^2\left(1\,-\,\rho^4\right)\,d\rho\ =\ \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{3}\rho^3\,-\,\frac{1}{7}\,\rho^7\right]_0^1 = \frac{\pi}{42}.$$

Esercizio 2. Poiché l'equazione differenziale da risolvere è lineare e a coefficienti costanti possiamo determinare una base delle soluzioni dell'omogenea con il *metodo del polinomio caratteristico*, ossia risolvendo l'equazione algebrica:

$$\lambda^2\,-\,12\,\lambda\,+\,35\,=\,0.$$

Questa ammette come soluzioni $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 5$, quindi lo spazio vettoriale V_0 delle soluzioni dell'equazione omogenea è

$$V_0 = \{C_1\,e^{7t}\,+\,C_2\,e^{5t},\ C_1,\,C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Dato che il secondo membro è di tipo sin determiniamo una soluzione particolare u_f della non omogenea del tipo

$$u_f = A\sin t + B\cos t, \quad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Quindi $u_f' = A\cos t - B\sin t$, $u_f'' = -A\sin t - B\cos t$, sostiuendo nell'equazione

$$-A\sin t - B\cos t - 12A\cos t + 12B\sin t + 35A\sin t + 35B\cos t \;=\; \sin t,$$

raccogliendo a fattor comune

$$(-A + 12B + 35B)\sin t + (-B - 12A + 35B)\cos t = \sin t,$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -A + 12B + 35A &= \;1 \\ \\ -B - 12A + 35B &= \;0 \end{cases},$$

che fornisce $A = \dfrac{17}{650}$ e $B = \dfrac{3}{325}$.
Otteniamo infine che l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data è

$$V_f = \{C_1\, e^{7t} \; + \; C_2\, e^{5t} + \frac{17}{650}\sin t \; + \; \frac{3}{325}\cos t, \;\; C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 3. Determiniamo i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= \;3x^2 + 10x + 8 \;&= \;0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= \;3y^2 + 10x + 8 \;&= \;0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(-2, -2)$, $(-\frac{4}{3}, -2)$, $(-2, -\frac{4}{3})$, $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.
Stabiliamo la natura di questi punti calcolando la *matrice hessiana* in ciascuno di essi. La *matrice hessiana* di f è la seguente

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 10 & 0 \\ 0 & 6y + 10 \end{pmatrix}$$

Calcoliamola in ciascuno dei punti singolari.

$$H(-2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante maggiore di zero mentre $f_{xx}(0, 0) = -36 < 0$ implica che $(-2, -2)$ è punto di massimo relativo.

$$H(-\frac{4}{3}, -2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H(-2, -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Queste due matrici hanno il determinante minore di zero quindi i punti considerati sono di sella.

$$H(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante maggiore di zero mentre $f_{xx}(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = 2 > 0$ implica che $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ è punto di minimo relativo.

Infine i punti che abbiamo trovato non sono né di massimo né di minimo assoluto perché risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \,+\, 5x^2 \,+\, 8x \;=\; \pm\infty.$$

Esercizio 4. Osserviamo che la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $F(0,0)=0$. Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; 6y^2+4y+1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \;=\; 4x^3-1$$

che sono entrambe diverse da zero in $(0,0)$. Possiamo esplicitare l'insieme degli zeri di F in un intorno di $(0,0)$ sia come funzione di x che di y, ovvero esitono $y=f(x)$ tale che $F(x,f(x))=0$ e $x=g(x)$ tale che $F(g(y),y)=0$. Più precisamente, nel primo caso, esistono un intorno $U_x(0)$, un intorno $V_y(0)$ tali che esiste una ed una sola funzione $f:U_x(0)\longrightarrow V_y(0)$ che verifica $F(x,f(x))=0$ per ogni $x\in U_x(0)$. Il *teorema del Dini* ci permette di calcolare anche $f'(0)$ mediante la formula

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}} = -\frac{4x^3-1}{6[f(x)]^2+4f(x)+1}.$$

Da questa $f'(0)=1$ che implica, per il teorma della permanenza del segno, che in un intorno di $x=0$ la derivata prima è positiva, ossia la funzione è crescente. La formula sopra di consente di calcolare inoltre la derivata seconda di f. Applicando la formula di derivazione delle funzioni composte possiamo scrivere

$$f''(x) = -\frac{12x\{6[f(x)]^2+4f(x)+1\} - f'(x)(4x^3-1)[12f(x)+4]}{\{6[f(x)]^2+4f(x)+1\}^2}$$

da cui $f''(0)=-4$. Per il teorema della permanenza del segno, la derivata seconda è negativa in un intorno di $x=0$, quindi in questo intorno f è concava. Possiamo di conseguenza tracciare il seguente grafico.