Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2

Prova scritta del 3 Febbraio 2015

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Calcolare il valore dell'integrale

$$\iint_D \frac{x}{y^3}\, dx\, dy,$$

dove $D = \{(x,y):\ 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le x \le y\}$.

2. (Punti 8) Stabilire se i seguenti campi sono conservativi ed eventualmente calcolarne il potenziale.

$$\mathbf{F}(x,y) = (6x^5y^4 + 2x,\ 4y^3x^6), \quad \mathbf{G}(x,y) = (6x^5y^4 + 2y,\ 4y^3x^6), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. (Punti 8) Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

sul dominio

$$D = \{(x,y,z):\ \ x^2+y^2+z^2 \le 27\}.$$

4. (Punti 8) Calcolare il flusso del campo vettoriale

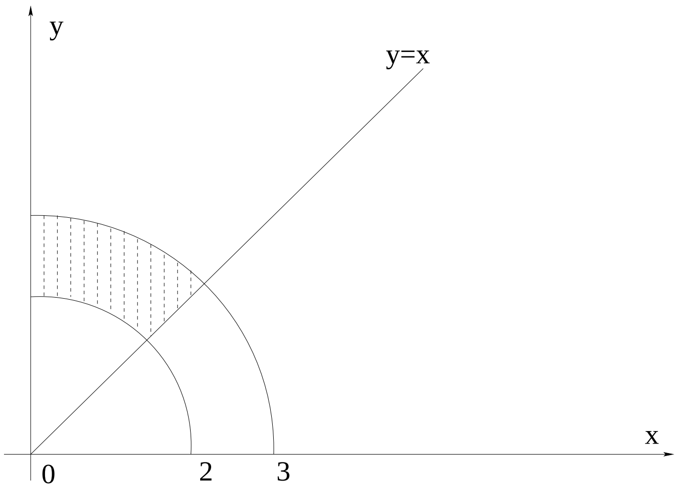
$$F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie della sfera

$$S = \{(x,y,z):\ \ x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

Esercizio 1.



Il dominio di integrazione (vedi figura) è una porzione di corona circolare, per questo è opportuno effettuare un cambio di coordinate passando in coordinate polari, di conseguenza il nuovo dominio di integrazione è

$$E = \{(\rho, \theta) : \; 2 \leq \rho \leq 3, \; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Tenuto conto che il determinante dello jacobiano del passaggio in coordinate polari è ρ possiamo scrivere:

$$\iint_D \frac{x}{y^3} \, dx \, dy = \iint_E \frac{\rho \cos\theta}{\rho^3 \sin^3\theta} \rho \; d\rho \, d\theta = \int_2^3 \frac{1}{\rho} \, d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \; d\theta =$$

$$= \log\frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\theta} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \log\frac{3}{2}.$$

Esercizio 2. Dato che il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$, quindi è semplicemente connesso, possiamo veder se sono conservativi guardando se sono irrotazionali ossia se vale che $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ o $\nabla \times \mathbf{G} = 0$. Una facile verifica, come si vede qui sotto, ci permette di stabilire che $\mathbf{F}$ è irrotazionale e quindi conservativo mentre $\mathbf{G}$ non lo è.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 24y^3x^5 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 24y^3x^5 + 2 \neq \frac{\partial G_2}{\partial x} = 24y^3x^5$$

Per calcolare il potenziale di $\mathbf{F}$ integriamo lungo il segmento γ che unisce $(0,0)$ e (x,y), che possiamo parametrizzare nel modo seguente

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} r_1(t) &= xt \\ r_2(t) &= yt \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$

Quindi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 F_1(\mathbf{r}(t))\, r_1'(t) + F_2(\mathbf{r}(t))\, r_2'(t)\ \ dt\ =\ \int_0^1 6t^9x^6y^4\ +\ 2tx^2\ +\ 4t^9y^4x^6\ =$$

$$= \left[\frac{6}{10}t^{10}x^6y^4\ +\ t^2x^2\ +\ \frac{4}{10}t^{10}y^4x^6\right]_0^1 = x^6y^4\ +\ x^2.$$

Esercizio 3. La funzione è di classe $C^0(D)$ ($C^\infty(D)$) e D è un insieme limitato e chiuso, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Questi valori vanno ricercati tra i valori assunti dalla funzione nei punti stazionari interni e tra quelli del bordo. Osserviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Non ci sono punti stazionari. Ricerchiamo punti di massimo e di minimo sulla frontiera di D, ossia su $\partial D = \{(x,y,z) :\ \ x^2+y^2+z^2 = 27\}$, mediante il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, ovvero tra i punti stazionari della funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x+y+z-\lambda(x^2+y^2+z^2-27).$$

Quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & 1-2\lambda x & = & 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & 1-2\lambda y & = & 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} & = & 1-2\lambda z & = & 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = & x^2+y^2+z^2-27 & = & 0 \end{cases}$$

Risolviamo ricavando λ dalla prima equazione $\lambda = \frac{1}{2x}$ che sostituito nella seconda fornisce $y = x$ e nella terza $z = x$ da cui $y = z$. Tenuto conto di queste eguaglianze, dalla quarta equazione ricaviamo $3x^2 = 27$ ossia $x_{1,2} = \pm 3$. I punti sono quindi $(3,3,3)$ e $(-3,-3,-3)$. Calcolando in essi i valori della funzione otteniamo il valore massimo ed il valore minimo di essa: $f(3,3,3) = 9$, $f(-3,-3,-3) = -9$.

Esercizio 4. Ricordiamo che il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ uscente dalla sfera S è

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}_e dS$$

Per fare questo possiamo seguire due strade: la prima consiste nel calcolare direttamente questo integrale di superficie, la seconda consiste nell'applicare la *formula della divergenza di Gauss* ossia

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}_e dS\ =\ \iiint_S \nabla\cdot\mathbf{F}\ \ dx\,dy\,dz.$$

Per fare questo osserviamo che

$$div\,\mathbf{F} \;=\; \nabla \cdot \mathbf{F} \;=\; \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 2z.$$

Sostituendo nell'integrale

$$\iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\;\; dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_S 2\,dx\,dy\,dz \;+\; 2\iiint_S z\;\; dx\,dy\,dz \;=$$

(passiamo in coordinate sferiche nel secondo integrale)

$$= 2\iiint_S \; dx\,dy\,dz \;+\; 2\int_0^2 \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos\phi\;\;\sin\phi\;\; d\phi \;=\; \frac{64}{3}\,\pi.$$

Infatti il secondo integrale è zero, mentro il primo è uguale alla misura della sfera S.