Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 15 Febbraio 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(**1**) (Punti 8) Dimostrare per induzione la seguente identità:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+k) \;=\; n^2(n-1), \;\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{8x\,+\,55} \;-\; \sqrt{x-1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\;\frac{\sin\sqrt[3]{x}\;-\;\log(1+\sqrt[3]{x})}{\cos\sqrt[3]{x}\;-\;\cos 2\sqrt[3]{x}}.$$

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-3}^{-2}\frac{x\,+\,\sqrt{x+3}}{x+4}\;\;dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(**1**) (Punti 8) Dimostrare per induzione la seguente identità:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+k) \;=\; n^2(n-1), \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Svolgimento.

Per $n=1$ è banalmente vera. Proviamo l'induttività della proposizione, ossia $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+k) \;=\; n^2(n-1) \;\Longrightarrow\; \sum_{k=0}^{n}(3k^2+k) \;=\; (n+1)^2 n.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n}(3k^2+k) \;= \sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+k) \;+\; 3n^2+n \;=$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$= n^2(n-1) \;+\; 3n^2+n \;=\; n^3-n^2+3n^2+n \;=$$

$$=\; n^3+2n^2+n \;=\; (n^2+2n+1)n \;=\; (n+1)^2 n.$$

Che è quanto si doveva dimostrare.

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{8x\,+\,55} \;-\; \sqrt{x-1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è determinato dai valori di x che rendono reali le radici e si ricavano risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} 8x\,+\,55 & \geq\; 0 \\ x\,-\,1 & \geq\; 0 \end{cases},$$

ovvero $x \geq 1$. Esaminiamo ora il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio.

$$f(1) = 3\sqrt{7}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{8+\frac{55}{x}} \;-\; \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right] \;=\; +\infty$$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{8x+55} \;-\; \sqrt{x-1}}{\sqrt{8x+55} \;+\; \sqrt{x-1}}\,(\sqrt{8x+55} \;+\; \sqrt{x-1}) \;=$$

$$=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{7x+56}{\sqrt{8x+55}+\sqrt{x-1}} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x(7+\frac{56}{x})}{\sqrt{x}\left(\sqrt{8+\frac{55}{x}} \;+\; \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \;=\; +\infty.$$

Vediamo se esiste un asintoto obliquo.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}\left[\sqrt{8+\frac{55}{x}} \;-\; \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right] \;=\; 0.$$

Oppure

$$m \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{7x+56}{x\,\sqrt{8x+55}+\sqrt{x-1}} \;\lim_{x\to+\infty} \frac{x(7+\frac{56}{x})}{x\sqrt{x}\left(\sqrt{8+\frac{55}{x}} \;+\; \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \;=\; 0.$$

Non esiste un asintoto obliquo.
Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) \;=\; \frac{4}{\sqrt{8x+55}} \;-\; \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Segno della derivata prima.

$$f'(x) \;>\; 0 \iff \frac{4}{\sqrt{8x+55}} \;>\; \frac{1}{2\sqrt{x-1}}. \iff 8\sqrt{x-1} \;>\; \sqrt{8x+55}.$$

Le soluzioni sono

$$x \;>\; \frac{17}{8}.$$

Quindi la funzione risulta crescente sull'intervallo $\left(\frac{17}{8},\,+\infty\right)$ e decrescente su $\left[1,\,\frac{17}{8}\right)$.
Calcoliamo la derivata seconda.

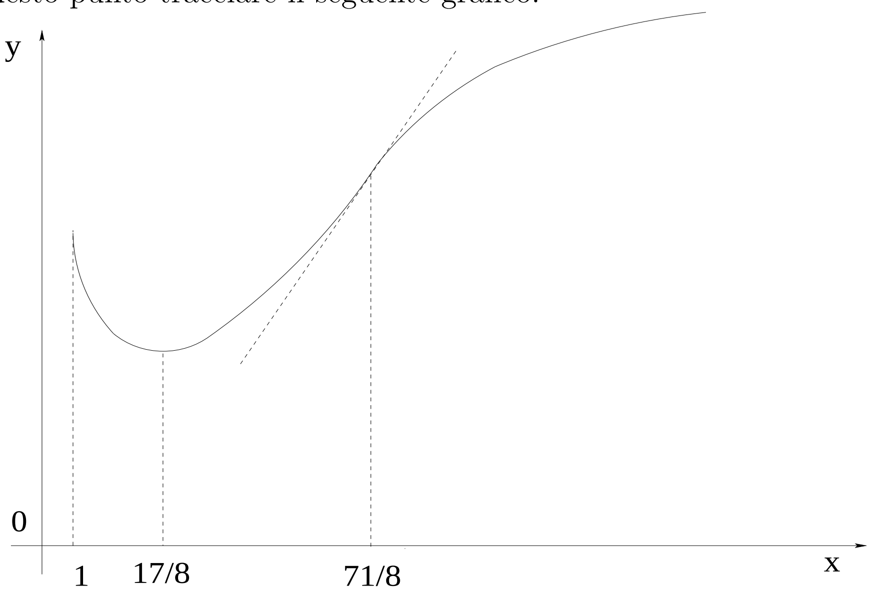
$$f''(x) \;=\; \frac{-16}{\sqrt{(8x+55)^3}} \;+\; \frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Determiniamo il segno della drivata seconda

$$f''(x) > 0 \iff \frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}} > \frac{16}{\sqrt{(8x+55)^3}} \iff \frac{1}{x-1} > \frac{16}{8x+55} \iff \frac{71}{8} > x.$$

La funzione risulta convessa su $\left[1, \frac{71}{8}\right)$ e concava su $\left(\frac{71}{8}, +\infty\right)$. Il punto $x_1 = \frac{71}{8}$ è di flesso.

Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico.



(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt[3]{x} - \log(1+\sqrt[3]{x})}{\cos\sqrt[3]{x} - \cos 2\sqrt[3]{x}}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Risolviamo l'indeterminazione mediante gli sviluppi di Taylor dopo aver effettuato il cambio di variabile $t = \sqrt[3]{x}$, quindi per x che tene a zero si ha che t tende a zero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt[3]{x} - \log(1+\sqrt[3]{x})}{\cos\sqrt[3]{x} - \cos 2\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \log(1+t)}{\cos t - \cos 2t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 + 2t^2 + o(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{\frac{3}{2}t^2 + o(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{3}{2}t^2} = \frac{1}{3}.$$

Nel penultimo passiaggio è stato utilizzato il principio di sostituzione degli infinitesimi ed il fatto che $t^3 = o(t^2)$.

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x + \sqrt{x+3}}{x+4}\, dx.$$

Svolgimento.
Effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$$t^2 = x+3 \iff x = t^2-3, \text{ quindi } dx = 2t\,dt.$$

Inoltre per $x = -3$ si ha che $t = 0$, mentre per $x = -2$ si ha che $t = 1$. Possiamo quindi scrivere

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x + \sqrt{x+3}}{x+4}\, dx = \int_0^1 \frac{t^2 - 3 + t}{t^2 + 1} 2t\ dt = 2\int_0^1 \frac{t^3 + t^2 - 3t}{t^2+1}\ dt.$$

Mediante l'algoritmo della divisione scomponiamo il numeratore della frazione.

$$\begin{array}{cccc|c}
t^3 & t^2 & -3t & & \underline{t^2+1} \\
-t^3 & & -t & & t+1 \\
// & t^2 & -4t & & \\
 & -t^2 & & -1 & \\
 & // & -4t & -1 &
\end{array}$$

Quindi

$$t^3 + t^2 - 3t = (t^2+1)(t+1) - (4t+1) \iff \frac{t^3+t^2-3t}{t^2+1} = t+1-\frac{4t+1}{t^2+1}.$$

Sostituendo

$$2\int_0^1 \frac{t^3+t^2-3t}{t^2+1}\ dt = 2\int_0^1 (t+1)\ dt - 2\int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1}\ dt =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\ dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\ dt =$$

$$= 3 - 4\left[\log(t^2+1)\right]_0^1 - 2\left[\arctan t\right]_0^1 = 3 - 4\log 2 - 2\frac{\pi}{4} = 3 - \log 16 - \frac{\pi}{2} = 3 - 4\log 2 - \frac{\pi}{2}..$$