Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 8 Gennaio 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(**1**) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = 5\,x - \sqrt{9\,x^2 - 400},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin 3\,x^2 - 3 \sin x^2}{\log(1 + 2\,x^2) - 2 \log(1 + x^2)}$$

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \arctan(\sqrt{1+x}) \; dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(**1**) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ \\ a_{n+1} & = & \sqrt{3\,a_n\,+\,4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Svolgimento

La successione è ben definita in quanto ciscuno dei suoi termini è positivo e quindi la radice quadrata non perde di significato.

Osserviamo che è monotona crescente procedendo per induzione.

$$a_1 \,=\, 2 \,>\, 0 \,=\, a_0.$$

Verifichiamo l'induttività della proposizione, ossia,

$$a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n < a_{n+1}.$$

Infatti:

$$a_n \,=\, \sqrt{3a_{n-1}+4} \,<\, \sqrt{3a_n+4} \,=\, a_{n+1} \iff 3a_{n-1}+4 \,<\, 3a_n+4 \iff a_{n-1} \,<\, a_n.$$

Per il teorema di regolarità delle successioni monotone, la successione ammette dunque limite. Se L è un numero reale dovrà risolvere l'equazione seguente ottenuta passando al limite nell'equazione ricorsiva:

$$L \,=\, \sqrt{3L+4} \iff L^2 - 3L - 4 = 0.$$

Le soluzoni sono $L_1 \,=\, -1$ e $L_2 \,=\, 4$. L_1 non puó essere il limite perché non è punto di accumulazione per la successione dato che questa è sempre positiva. Sappiamo invece che se L_2 fosse il limite cercato si dovrá avere

$$L_2 \,=\, \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

In definitiva se riusciamo a provare questo, allora abbiamo provato che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \,=\, 4,$$

perché, per il citato teorema, una successione monotona e limitata ha limite reale.

Dimostriamo quindi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $a_n < 4$ procedendo per induzione. Infatti $a_0 < 4$, mentre l'iduttivitá dalle seguenti considerazioni

$$a_{n+1} \,=\, \sqrt{3a_n+4} < 4 \iff 3a_n+4 \,<\, 16 \iff a_n < 4.$$

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \,=\, 5\,x \,-\, \sqrt{9\,x^2 \,-\, 400},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di essitenza della funzione è determinato dai valori di x che rendono reale la radice quadrata ossia $9x^2 - 400 \geq 0$. Quindi

$$C.E. = \left\{ x : x \geq \frac{20}{3} \text{ oppure } x \leq -\frac{20}{3} \right\}.$$

Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio. Per x che tende a piú infinito il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ che risolviamo mediante il seguente artificio algebrico.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x - \sqrt{9x^2 - 400}}{5x + \sqrt{9x^2 + 400}} (5x + \sqrt{9x^2 + 400}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{16x^2 + 400}{5x + \sqrt{9x^2 - 400}} = +\infty.$$

Oppure, più semplicemente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \left(5 - \sqrt{9 - \frac{400}{x^2}} \right) = +\infty \cdot 2 = +\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette asintoto obliquo del tipo $y = mx + q$, per x che tende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 - \sqrt{9 - \frac{400}{x^2}} = 2$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} 3x - \sqrt{9x^2 - 400} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - \sqrt{9x^2 - 400}}{3x^2 + \sqrt{9x^2 - 400}} (3x + \sqrt{9x^2 - 400}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{400}{3x + \sqrt{9x^2 - 400}} = 0.$$

L'equazione dell'asintoto per x che tende a $+\infty$ è

$$y = 2x.$$

Esaminiamo il comportamento della funzione per x che tende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Vediamo se ammette un asintoto obliquo $y = mx + q$([1]).

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 5 + \sqrt{9 - \frac{400}{x^2}} = 8$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 8x = \lim_{x\to-\infty} -3x - \sqrt{9x^2-400} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x - \sqrt{9x^2-400}}{-3x^2 + \sqrt{9x^2-400}} (-3x + \sqrt{9x^2-400}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{400}{-3x + \sqrt{9x^2-400}} = 0.$$

L'equazione dell'asintoto per x che tende a $-\infty$ è

$$y = 8x.$$

Calcoliamo la derivata prima determinando quindi il suo segno.

$$f'(x) = 5 - \frac{9x}{\sqrt{9x^2-400}}.$$

Abbiamo che $f'(x) > 0$ se

$$\sqrt{9x^2-400} > \frac{9x}{5},$$

questa equivale ai sistemi

$$\begin{cases} 9x^2 - 400 > \frac{81}{25}x^2 \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \in C.E. \end{cases}$$

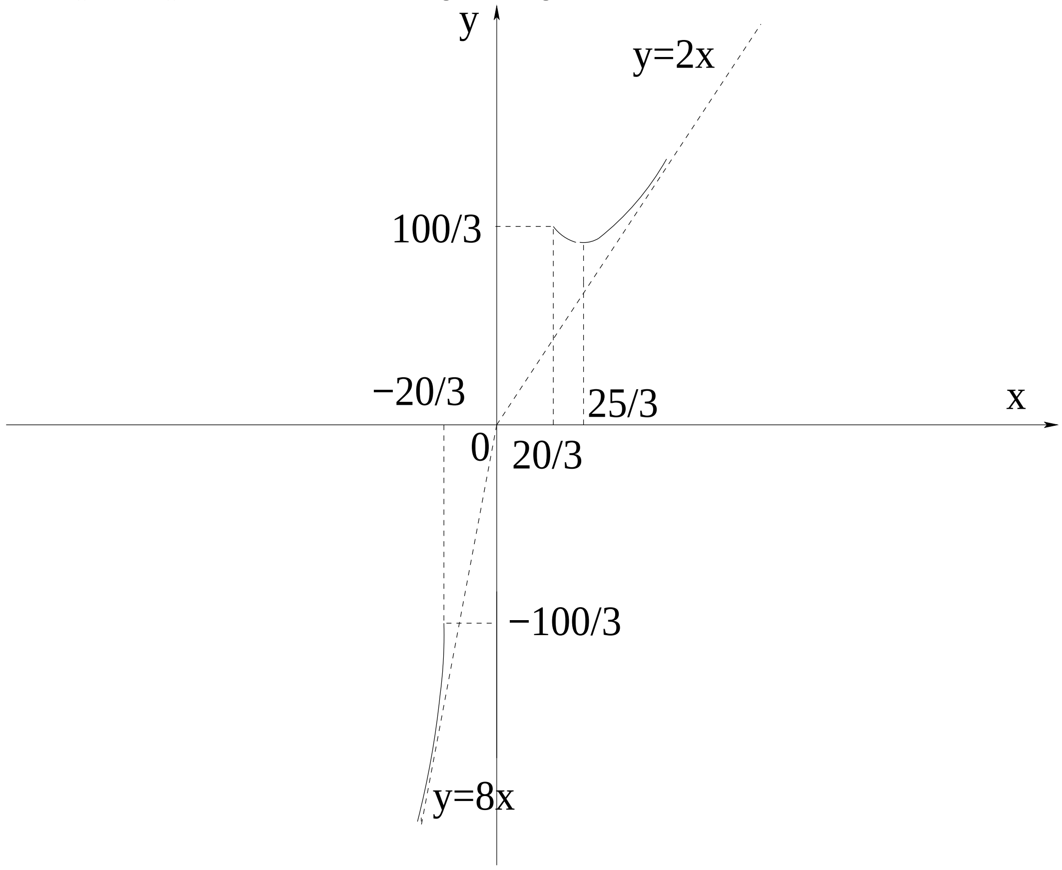
Le soluzioni del primo sistema sono $x > \frac{25}{3}$, mentre quelle del secondo sono $x < -\frac{20}{3}$. Possiamo di conseguenza affermare che la funzione risulta crescente su $\left(-\infty, -\frac{20}{3}\right]$, e su $\left[\frac{25}{3}, +\infty\right)$. Mentre è decrescente su $\left[\frac{20}{3}, \frac{25}{3}\right]$. Di conseguenza il punto $x_1 = \frac{25}{3}$ è punto di minimo relativo.
Si osservi che anche i punti $-\frac{20}{3}$ e $\frac{20}{3}$ sono di massimo relativo.
Determiniamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{3600}{(9x^2-400)\sqrt{9x^2-400}}.$$

Questa risulta maggiore di zero per ogni x appartenente al campo di esistenza di f tolti gli estremi. Quindi la funzione risulta convessa sugli intervalli $\left(-\infty, -\frac{20}{3}\right)$, $\left(\frac{20}{3}, +\infty\right)$.
Infine osserviamo che $f(\frac{20}{3}) = \frac{100}{3}$, $f(-\frac{20}{3}) = -\frac{100}{3}$, $\lim_{x\to\frac{20}{3}+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\frac{20}{3}-} f'(x) = +\infty$,

[1]Si tenga presente che se $x < 0$ allora $\sqrt{x^2} = -x$

Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico.



(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin 3\,x^2 \;-\; 3\,\sin x^2}{\log(1\;+\;2\,x^2)\;-\;2\,\log(1\;+\;x^2)}$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma ideterminata $\frac{0}{0}$. Risolviamo l'indeterminazione utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin 3x^2 \;=\; 3x^2 - \frac{(3x^2)^3}{6} \;+\; o(x^6) \;=\; 3x^2 \;-\; \frac{9}{2}\,x^6 \;+\; o(x^6);$$

$$\sin x^2 \;=\; x^2 \;-\; \frac{x^6}{6} \;+\; o(x^6);$$

$$\log(1+2x^2) \;=\; 2x^2 \;-\; \frac{4x^4}{2} \;+\; o(x^4) \;=\; 2x^2 \;-\; 2x^4 \;+\; o(x^4);$$

$$\log(1+x^2) \;=\; x^2 \;-\; \frac{x^4}{2} \;+\; o(x^4).$$

Sostituendo nel limite ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{9}{2}\,x^6 \;+\; \frac{1}{2}\,x^6 \;+\; o(x^6)}{-2\,x^4 \;+\; x^4 \;+\; o(x^4)} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{-4\,x^6}{-x^4} \;=\; 0.$$

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \arctan(\sqrt{1+x}) \;\; dx.$$

Svolgimento

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabili

$$t = \sqrt{1+x}, \text{ ossia } t^2 \;=\; 1+x, \text{ da cui } dx \;=\; 2t\,dt.$$

In particolare se $x = -1$ allora $t = 0$, mentre se $x = 0$ allora $t = 1$. Di conseguenza risulta

$$\int_{-1}^{0} \arctan(\sqrt{1+x}) \;\; dx \;\;=\;\; \int_{0}^{1} 2t \,\arctan t \;\; dt.$$

Integriamo per parti([2]) prendendo $f'(t) = 2t$, quindi $f(t) = t^2$, $g(t) = \arctan t$, $g'(t) \;=\; \frac{1}{1+t^2}$.

$$\int_0^1 2t \,\arctan t \;\, dt \;=\; \left[t^2 \,\arctan t\right]_0^1 \,-\, \int_0^1 t^2\,\frac{1}{1+t^2} \;\, dt \;=\; \frac{\pi}{4} \;-\; \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \;\, dt \;=$$

$$= \frac{\pi}{4} \;-\; \int_0^1 1 \;\, dt \;+\; \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \;\, dt \;=\; \frac{\pi}{4} \;-\; [t]_0^1 \;+\; [\arctan t]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{4} \;-\; 1 \;+\; \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{2} \;-\; 1.$$

[2]

$$\int f'(t)\,g(t) \;\; dt \;=\; f(t)\,g(t) \;-\; \int f(t)\,g'(t) \;\; dt.$$