Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 7 Giugno 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) (Punti 8) Stabilire il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= \dfrac{5a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$$

2) (Punti 8) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2 \sin x) - \cos(\sin 2x)}{\log(1 + x^\alpha)} = l$$

3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x - \log(1 + e^x),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^4 \sqrt{\frac{x+4}{x+6}}\, dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1) Stabilire il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ & & & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} & = & \dfrac{5a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$$

Svolgimento

La successione è ben definita in quanto il denominatore della frazione è positivo per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto, procedendo per induzione, risulta che i termini della successione sono tutti positivi per $n > 0$. Infatti $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, se $a_n > 0$ è evidente che $a_{n+1} > 0$.
Verifichiamo che la successione è monotona crescente per induzione.

$$a_0 < a_1 \iff 0 < \frac{1}{2}$$

Induttività

$$a_{n+1} < a_{n+2} \iff a_{n+1} = \frac{5a_n + 1}{a_n + 2} < \frac{5a_{n+1} + 1}{a_{n+1} + 2} = a_{n+2} \iff$$
$$\iff 10\, a_n + a_{n+1} < 10\, a_{n+1} + a_n \iff a_n < a_{n+1}$$

La successione è limitata superiormente. Infatti

$$\frac{5a_n + 1}{a_n + 2} < 5 \iff 5a_n + 1 < 5a_n + 10$$

Che è sempre vera.
Di conseguenza la successione è monotona crescente e limitata superiormente quindi, per il teorema di regolarità delle successioni monotone, ammette limite $L \in \mathbb{R}$ che risolve l'equazione seguente

$$\frac{5L + 1}{L + 2} = L \iff L^2 - 3L - 1 = 0$$

Le soluzioni sono $L_1 = 3 - \sqrt{13}$, $L_2 = 3 + \sqrt{13}$. L_1 non è punto di accumulazione della successione perché è negativo. Il limite della succesione è L_2.

2) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2\,\sin x) - \cos(\sin\, 2x)}{\log(1 + x^\alpha)} = l$$

Svolgimento
Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.
Poiché $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$, possiamo scrivere

$$\text{se } t = 2\sin x \qquad \cos(2\,\sin x) = 1 - 2\,\sin^2 x + \frac{2}{3}\,\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$
$$\text{se } t = \sin 2x \qquad \cos(\sin 2x) = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} + \frac{\sin^4 2x}{24} + o(\sin^4 2x).$$

Inoltre

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

$$\sin^4 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 = x^4 + o(x^4).$$

$$\sin^2 2x = \left(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin^4 2x = \left(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right)^4 = 16x^4 + o(x^4)$$

Sostituendo

$$\cos(2\sin x) - \cos(\sin 2x) = -2\sin^2 x + \frac{2}{3}\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{24}\sin^4 2x + o(x^4) =$$
$$= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{8}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = -2\,x^4 + o(x^4)$$

Essendo

$$\log(1 + x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$$

possiamo concludere che il limite assegnato è uguale a -2 per $\alpha = 4$.

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\,e^x - \log(1 + e^x),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di esistenza di f è $\mathbb{R}$. Possiamo quindi calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

la funzione non ha asintoti per $x \to \pm\infty$.
Calcoliamo la derivata prima

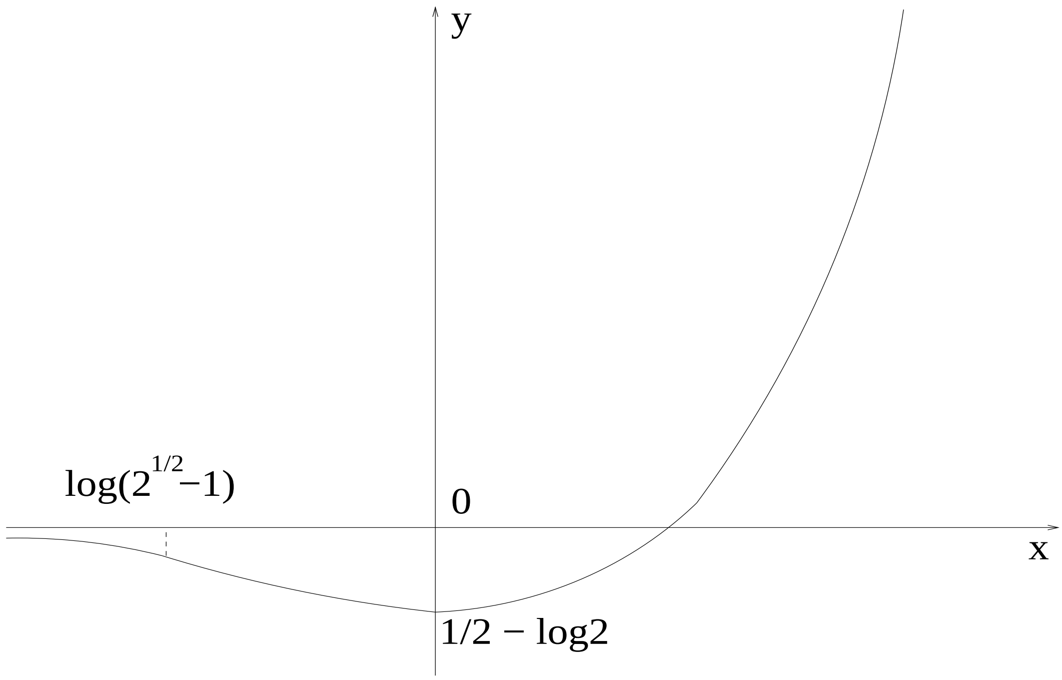
$$f'(x) = \frac{1}{2}\,e^x - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x\,(e^x - 1)}{2(1 + e^x)}.$$

Risulta $f'(x) = 0$ se $e^x - 1 = 0$, ossia $x = 0$, mentre $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Quindi f cresce se $x > 0$ e decresce se $x < 0$. $x_0 = 0$ è punto di minimo. In particolare $f(0) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$.
Calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{e^x}{2(1 + e^x)^2}\,(e^{2x} + 2e^x - 1)$$

Per studiare il segno di f'' consideriamo il termine $(e^{2x} + 2e^x - 1)$ perché l'altro è positivo per ogni x. Posto $t = e^x$ risolviamo l'equazione $t^2 + 2t - 1 = 0$. Le soluzioni sono $t_1 = -1 - \sqrt{2}$ e $t_2 = -1 + \sqrt{2}$. t_1 si scarta perché $e^x = t_1$ non è verificata per nessun valore di x. Quindi $e^x = t_2$ da cui $x = \log(\sqrt{2} - 1) < 0$. Poiché

$e^{2x} + 2e^{x} - 1 > 0$ per valori esterni alle radici si ha che $f''(x) > 0$ per $x > \log(\sqrt{2} - 1)$ e negativo per $x < \log(\sqrt{2} - 1)$. Quindi il punto $x_1 = \log(\sqrt{2} - 1)$ è di flesso.
Possiamo tracciare il seguente grafico.



(4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^4 \sqrt{\frac{x+4}{x+6}}\ dx.$$

Svolgimento
Risolviamo per sostituzione ponendo

$$t^2 = \frac{x+4}{x+6} \iff x = \frac{4-6t^2}{t^2-1}$$

da cui

$$dx = \frac{4t}{(t^2-1)^2}\ dt.$$

Per $x = 4$ risulta $t = \sqrt{\frac{4}{5}}$, mentre per $x = 2$ risulta $t = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{4}{5}}} \frac{4t^2}{(t^2-1)^2}\ dt.$$

Risolviamo l'ultimo integrale considerando la scomposizione

$$\frac{4t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{(t+1)^2},$$

in quanto il polinomio al denominatore ammette radici ± 1 ciascuna con molteplicità 2.
Si calcolano A, B, C, D deducendole dall'identità

$$\frac{4t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A(t+1)(t-1)^2 + B(t+1)(t-1)^2 + C(t+1)^2 + D(t-1)^2}{(t^2-1)^2}$$

Da cui eguagliando i numeratori

$$4t^2 \;=\; A(t+1)(t-1)^2 + B(t+1)(t-1)^2 + C(t+1)^2 + D(t-1)^2.$$

Invece di sviluppare l'espressione al secondo membro ed eguagliare coefficienti dei termini aventi stesso grado, assegnamo dei valori, possibilmente semplici, alla variabile t, eguagliando primo e secondo membro:
per $t = 1$ si ha $4 = C4$
per $t = -1$ si ha $4 = D4$
per $t = 0$ si ha $0 = -A + B + C + D$
per $t = 2$ si ha $16 = 9A + 3B + 9C + D$
In questo modo ci siamo ricondotti al sistema lineare in quattro equazione e quattro incognite

$$\begin{cases} C = 1 \\ D = 1 \\ -A + B + C + D = 0 \\ 9A + 3B + 9C + D = 16 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} B - A &= -2 \\ 9A + 3B &= 6 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad A \,=\, 1,\;\; B \,=\, -1.$$

$$\int \frac{4t^2 1}{(t^2-1)^2}\,dt = \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + \int \frac{1}{(t-1)^2}\,dt + \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$
$$= \log|t-1| - \log|t+1| - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \mathcal{C} =$$
$$= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \mathcal{C}$$

Tenuto conto di quanto ottenuto

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{4}{5}}} \frac{4t^2}{t^2-1}\;dt \;=\; \log\left|\frac{\sqrt{\frac{4}{5}}-1}{\sqrt{\frac{4}{5}}+1}\right| - 2\log\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}-1}{\sqrt{\frac{3}{4}}+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}-1} + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}-1} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}+1} + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}+1}$$

L'integrale poteva anche essere risolto ponendo: $t^2 = x + 6$, ossia $x = t^2 - 6$, $dx = 2t\,dt$, quindi

$$\int_2^4 \sqrt{\frac{x+4}{x+6}}\;dx \;=\; 2\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{10}} \sqrt{t^2-2}\,dt.$$

Questo integrale si risolve ricorrendo alla sostituzione: $\sqrt{t^2-2} = t + s$, da cui $t = -\dfrac{s^2+2}{2s}$ e $dt = -\dfrac{s^2-2}{2s^2}ds$, quindi

$$2\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{10}} \sqrt{t^2-2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{6}-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}-\sqrt{10}} \frac{(s^2-2)^2}{s^3}\,ds = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{6}-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}-\sqrt{10}} \left(\frac{1}{s} + \frac{4}{s^3} - \frac{2}{s^2}\right)\,ds \;=\; \cdots$$