Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 28 Giugno 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 - 4x^2} - \cos 2x\right) x^\alpha}{x \sin 3x - \log(1 + 3x^2)} = l$$

2) Data la funzione

$$f(x) = 12\,x - \arctan 3\sqrt[3]{x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \;\; \arctan(2 \sin x) \;\; dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti.

1) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 - 4x^2} - \cos 2x\right) x^\alpha}{x \sin 3x - \log(1 + 3x^2)} = l$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione:

Tenuto conto che $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) t^2 + o(t^2)$, posto $t = -4x^2$, si ha

$$\sqrt{1 - 4x^2} = 1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4);$$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4);$$

$$x \sin 3x = x\left[x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)\right] = 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{81}{40}x^6 + o(x^6);$$

$$\log(1 + 3x^2) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + 9x^6 + o(x^6).$$

Sostituendo nel limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 - 4x^2} - \cos 2x\right) x^\alpha}{x \sin 3x - \log(1 + 3x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[-\frac{8}{3}x^4 + o(x^4)\right] x^\alpha}{\left(\frac{81}{40} - 9\right) x^6 + o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^{4+\alpha} + o(x^{4+\alpha})}{\left(\frac{40}{81} - 9\right) x^6 + o(x^6)} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^{4+\alpha}}{-\frac{279}{40}x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{279}{40}} x^{\alpha - 2} = \frac{320}{837}, \text{ per } \alpha = 2.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = 12x - \arctan 3\sqrt[3]{x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di esistenza della funzione è tutto $\mathbb{R}$.
Osserviamo che la funzione è dispari: $f(x) = -f(-x)$.
Determiniamo il comportamento della funizione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \pm\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette asintoti, per x che tende a più o a meno infinito, del tipo $y = mx + q$.

$$m \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} 12 \;-\; \frac{\arctan 3\sqrt[3]{x}}{x} \;=\; 12.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;-\; 12\,x \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \arctan 3\sqrt[3]{x} \;=\; \pm\frac{\pi}{2}.$$

La funzione ammette asintoto $y = 12x + \frac{\pi}{2}$ per x che tende a $+\infty$, mentre per x che tende a $-\infty$ il suo asintoto è $y = 12x - \frac{\pi}{2}$.
Calcoliamo la derivata della funzione per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) \;=\; 12 \;-\; \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+9\sqrt[3]{x^2})} \;=\; \frac{12x^{2/3} + 108x^{4/3} - 1}{x^{2/3} + 9x^{4/3}}.$$

Il segno di f' è determinato dal numeratore della frazione in quanto il denominatore è sempre positivo, essendo costituito da somma di quantità positive. Per studiare il segno del numeratore poniamo $t = \sqrt[3]{x^2}$ e risolviamo la disequazione

$$108t^2 + 12t - 1 \geq 0.$$

Questa è verificata per i valori $t < -\frac{1}{6}$ oppure $t > \frac{1}{18}$. Tenuto conto della posizione fatta sopra si ha

$$x^{2/3} < -\frac{1}{6} \text{ oppure } x^{2/3} > \frac{1}{18}.$$

La prima disequazione non ha soluzioni perché il primo membro è sempre positivo.
La seconda è verificata per i valori

$$x^{1/3} < -\frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ oppure } x^{1/3} > \frac{1}{3\sqrt{2}} \iff x < -\frac{1}{54\sqrt{2}} \text{ oppure } x > \frac{1}{54\sqrt{2}}.$$

Possiamo quindi riassumere quanto ottenuto:
se $x < -\frac{1}{54\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ e quindi f è crescente su $(-\infty, -\frac{1}{54\sqrt{2}})$;

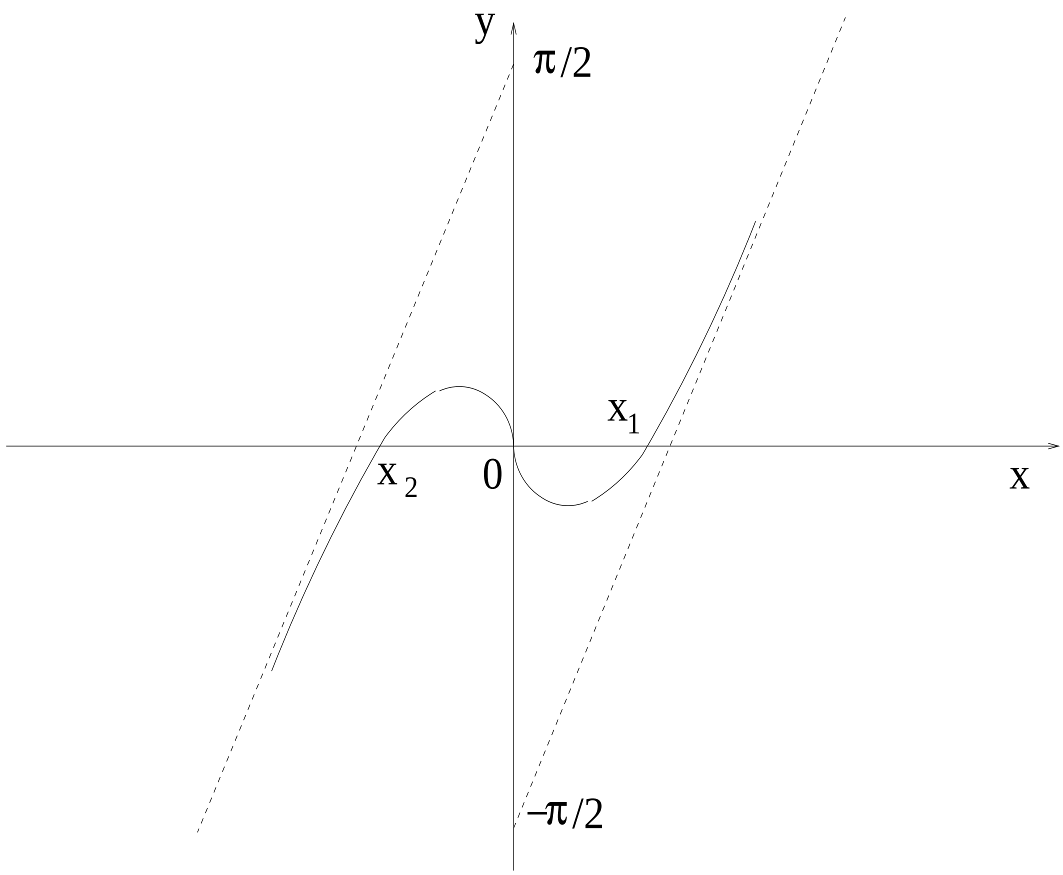
se $x > \frac{1}{54\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ e quindi f è crescente su $(\frac{1}{54\sqrt{2}}, +\infty)$;
$\frac{1}{54\sqrt{2}} < x < \frac{1}{54\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0$ e quindi f è decrescente su $(-\frac{1}{54\sqrt{2}}, \frac{1}{54\sqrt{2}})$.
Osserviamo che $f'(x)$ ha una singolarità per $x = 0$ e

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty.$$

Osserviamo che f si annulla nei punti $x_0 = 0$, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ con $x_1 = -x_2$. Infatti, dato che $f(0) = 0$ e che nell'intervallo $(-\frac{1}{54\sqrt{2}}, \frac{1}{54\sqrt{2}})$ la funzione è descrescente si ha che in $(0, \frac{1}{54\sqrt{2}})$ è negativa. Inoltre, poiché per $x > \frac{1}{54\sqrt{2}}$ essa è strettamente crescente e tendente a $+\infty$, esisterà un unico punto x_1 dove $f(x_1) = 0$. Essendo la funzione dispari si ha che esiste $x_2 = -x_1 < 0$ dove $f(x_2) = 0$.
Calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{2(1 + 18x^{2/3})}{3(x^{2/3} + 9x^{4/3})^2} \; \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Osserviamo che il primo fattore che compare nell'espresione è sempre positivo mentre il secondo è positivo per $x > 0$ e negativo altrimenti.
Quindi possiamo riassumere:
se $x < 0$ allora $f''(x) < 0$ e quindi f è concava su $(-\infty, 0)$;
se $x > 0$ allora $f''(x) > 0$ e quindi f è convessa su $(0, +\infty)$.
Possiamo in definitiva disegnare il seguente grafico di f.



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \quad \arctan(2 \sin x) \quad dx.$$

Svolgimento

Poniamo $t = 2\sin x$, quindi $dt = 2\cos x dx$ ovvero $\cos x\, dx = \frac{dt}{2}$. Inoltre per $x = 0$ risulta $t = 0$, mentre per $x = \frac{\pi}{6}$ si ha $t = 1$. Sostituendo e integrando per parti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan t \; dt \; &= \; \frac{1}{2}\left[t \; \arctan t\right]_0^1 \; - \; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt \; = \\ &= \frac{1}{2}\arctan 1 \; - \; \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \; dt \; = \\ &= \frac{\pi}{8} \; - \; \frac{1}{4}\left[\log(1+t^2)\right]_0^1 \; = \; \frac{\pi}{8} \; - \; \frac{1}{4} \; \log 2. \end{aligned}$$