Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 28 Gennaio 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 7}{a_n + 16} \end{cases}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{2}{2x+1}}.$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti.

1) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 7}{a_n + 16} \end{cases}$$

Svolgimento

La successione é ben definita perché il denomiatore della frazione non si annulla mai. Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $a_n > 0$. Si vede banalmente per induzione.
Studiamo la monotonia verificando che la successione é decrescente per induzione.
Primo passo: $a_2 = \frac{8}{17} < 1 = a_1$.
Induttivitá: $a_n < a_{n-1}$ implica $a_n < a_{n+1}$, infatti

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{a_{n-1} + 7}{a_{n-1} + 16} < \frac{a_n + 7}{a_n + 16} \iff 9a_{n-1} < 9a_n,$$

che é verificata per l'ipotesi induttiva.
La successione data é quindi decrescente e limitata inferiormente (perché come abbiamo visto sopra é positiva). Per il teorema di regolaritá delle successioni monotone essa ammette limite reale, che indicheremo con L. Questo valore é una soluzione dell'equazione

$$L = \frac{L + 7}{L + 16} \iff L^2 + 15L - 7 = 0.$$

Le cui soluzioni sono

$$L_1 = -\frac{15 + \sqrt{197}}{2} \text{ e } L_2 = \frac{\sqrt{197} - 15}{2}.$$

L_1 si scarta perché negativa, (essendo la succesione positiva questo valore non é punto di accomulazione per essa). Il limite cercato é quindi L_2.

2) Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{2}{2x+1}}.$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di essitenza di f é $\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\}$.
Comportamento agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Determiniamo eventuali asintoti del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x \lim_{x\to\pm\infty} x \left(e^{\frac{2}{2x+1}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x \left[\frac{2}{2x+1} + o\left(\frac{2}{2x+1}\right)\right] = 1.$$

Quindi l'equazione dell'asintoto per x che tende a $\pm\infty$ è

$$y = x + 1$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} f(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{0^-}} = 0^-.$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+} f(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty.$$

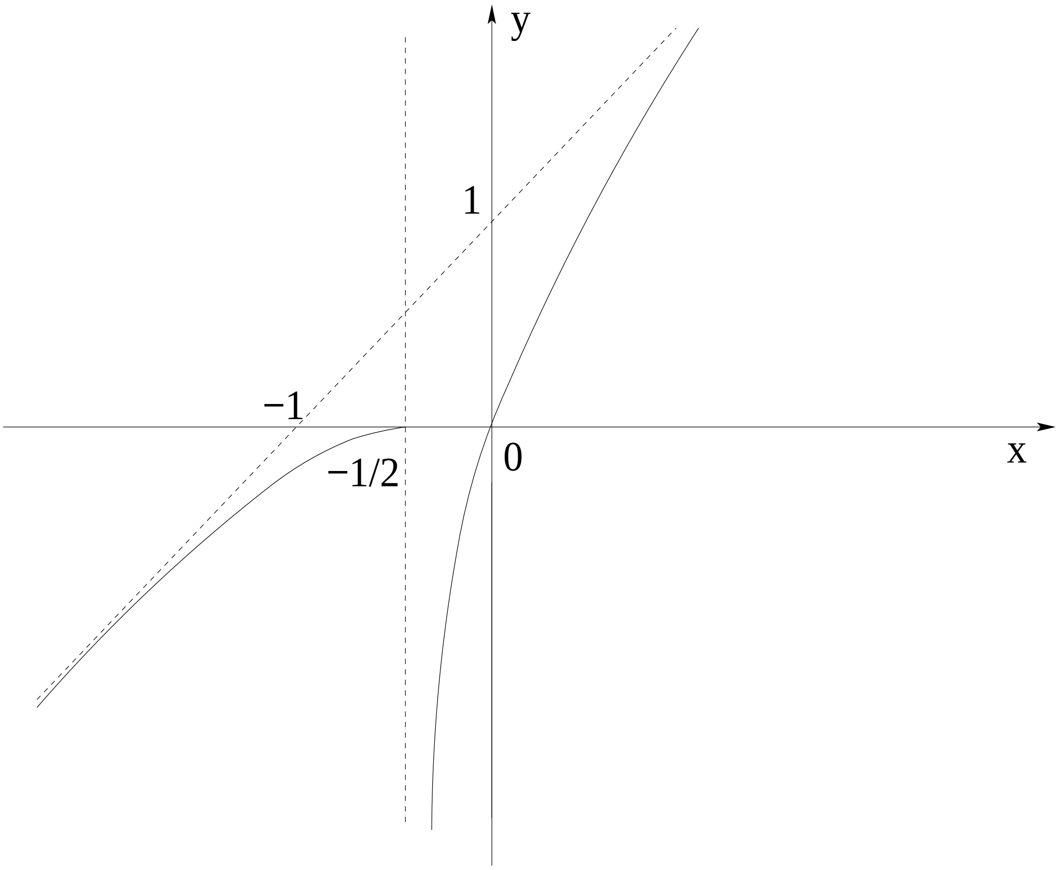
Calcoliamo la derivata prima e quindi il suo segno per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = e^{\frac{2}{2x+1}} \frac{4x^2+1}{(2x+1)^2}$$

É evidente che la funzione é sempre positiva e quindi la funzione é crescente su $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.
Calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -e^{\frac{2}{2x+1}} \frac{8}{(2x+1)^4}.$$

f'' é sempre negativa e quindi la funzione é concava su $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico.



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ \ dx.$$

Svolgimento

L'integrale proposto é di tipo improprio. Infatti l'integrazione avviene su un dominio non limitato e la funzione presenta una singolaritá nel primo estremo. Il calcolo avviene quindi mediante il passaggio al limite di due integrali ossia, fissato $c > 2$, determiniamo:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ \ dx = \lim_{s\to 2+} \int_s^c \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ \ dx\ \ + \lim_{s\to +\infty} \int_c^s \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ \ dx. \tag{1}$$

Risolviamo procedendo al calcolo delle primitive della funzione integranda. Per fare questo effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:

$$t^2 = x - 2,\ \text{quindi}\ 2t\,dt = dx$$

da cui

$$\int \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\ \ dx = \int \frac{t^2+2}{t}\, e^{-t}\, 2t\, dt = 2\int t^2 e^{-t}\, dt\ +\ 2\int e^{-t}\, dt = 2\int t^2\, e^{-t}\, dt\ -\ 4\, e^{-t}.$$

Risolviamo l'integrale indefinito rimasto integrando per parti.

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt \;=\; -t^2\, e^{-t} + 2\int t\, e^{-t}\, dt = -t^2\, e^{-t} \;-\; 2t\, e^{-t} \;+\; 2\int e^{-t}\, dt =$$

$$= -t^2\, e^{-t} \;-\; 2t\, e^{-t} \;-\; 2\, e^{-t} + C.$$

Sostituendo sopra e tenuto conto che $t = \sqrt{x-2}$ otteniamo

$$\int \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\; dx \;=\; -2(x-2)\, e^{-\sqrt{x-2}} - 4\sqrt{x-2}e^{-\sqrt{x-2}} \;-\; 8\, e^{-\sqrt{x-2}} + C.$$

Tenuto conto di (1) possiamo scrivere

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\; dx = \lim_{s\to 2+} \Big[-2(c-2)\, e^{-\sqrt{c-2}} - 4\sqrt{c-2}e^{-\sqrt{c-2}} \;-\; 8\, e^{-\sqrt{c-2}} +$$

$$+2(s-2)\, e^{-\sqrt{s-2}} + 4\sqrt{s-2}e^{-\sqrt{s-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{s-2}}\Big] +$$

$$\lim_{s\to +\infty} \Big[+2(s-2)\, e^{-\sqrt{s-2}} + 4\sqrt{s-2}e^{-\sqrt{s-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{s-2}}\Big] +$$

$$+2(c-2)\, e^{-\sqrt{c-2}} + 4\sqrt{c-2}e^{-\sqrt{c-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{c-2}} \;=\; 8.$$

Si può anche procedere direttamente nel modo che segue quando si effettua il cambiamento di variabile. Per $x = s$ si ha che $t = \sqrt{s-2}$, mentre per $x = c$ si ha che $t = \sqrt{c-2}$. Quindi calcolando le primitive come sopra, da (1), segue

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\; dx = \lim_{s\to 2+} \int_s^c \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\; dx \;+ \lim_{s\to +\infty} \int_c^s \frac{x\, e^{-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}\; dx \;=$$

$$= \lim_{s\to 2+} \int_{\sqrt{s-2}}^{\sqrt{c-2}} \frac{t^2+2}{t}\, e^{-t}\, 2t\, dt \;+\; \lim_{s\to +\infty} \int_{\sqrt{c-2}}^{\sqrt{s-2}} \frac{t^2+2}{t}\, e^{-t}\, 2t\, dt \;=$$

$$\lim_{s\to 2+} \Big[-2(c-2)\, e^{-\sqrt{c-2}} - 4\sqrt{c-2}e^{-\sqrt{c-2}} \;-\; 8\, e^{-\sqrt{c-2}} +$$

$$+2(s-2)\, e^{-\sqrt{s-2}} + 4\sqrt{s-2}e^{-\sqrt{s-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{s-2}}\Big] +$$

$$\lim_{s\to +\infty} \Big[+2(s-2)\, e^{-\sqrt{s-2}} + 4\sqrt{s-2}e^{-\sqrt{s-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{s-2}}\Big] +$$

$$+2(c-2)\, e^{-\sqrt{c-2}} + 4\sqrt{c-2}e^{-\sqrt{c-2}} \;+\; 8\, e^{-\sqrt{c-2}} \;=\; 8.$$