Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 18 Febbraio 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.

(1) Stabilire il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza e calcolarne il limite.

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 2. \end{cases}$$

(2) Stabilire per quali valori del parametro reale α la seguente funzione risulta continua nel punto $x = \pi$ (prolungabile per continuità).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \log(1 + \pi - x)}{\cos x + e^{(x-\pi)^2}}, & \text{per } x > \pi, \\ \dfrac{\sqrt{1 + 2(\pi - x)} - (\pi + 1 - x)}{\sqrt[3]{1 + \alpha(\pi - x)^2} - 1}, & \text{per } x < \pi. \end{cases}$$

(3) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_1^2 \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\ dx.$$

Soluzioni.

(1) Stabilire il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza e calcolarne il limite.

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 2. \end{cases}$$

Svolgimento

Dimostriamo per induzione che la successione è crescente. Dato che $a_2 = 10$ si ha che $a_1 < a_2$. Verifichiamo l'induttività della proposizione:

$$a_{n-1} < a_n \implies a_n < a_{n+1}.$$

Infatti

$$a_n < a_{n+1} \iff a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 2 < a_n^2 + a_n - 2 \iff a_{n-1}^2 + a_{n-1} < a_n^2 + a_n \iff$$

$$\iff 0 < a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1} \iff 0 < (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) + a_n - a_{n-1} \iff$$

$$\iff 0 < (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1} + 1).$$

Dall'ipotesi induttiva otteniamo la tesi se proviamo che

$$a_n + a_{n-1} + 1 > 0.$$

Questa diseguagliaza è verificata per ogni $n \geq 1$ in quanto i termini della seccessione sono tutti positivi. Non solo ma come si può intuire addirittura maggiori di 3. Anche questa proposizione possiamo dimostrarla per induzione. Per $n = 1$ è ovvia. Verifichiamo l'induttività.

$$a_n > 3 \implies a_{n+1} > 3.$$

Infatti

$$a_{n+1} > 3 \iff a_n^2 + a_n - 2 > 3 \iff a_n^2 + a_n > 5$$

questo è verificato applicando l'ipotesi induttiva

$$a_n^2 + a_n > 9 + 3 = 12 > 5.$$

In definitiva abbiamo dimostrato che la successione è monotona crescente quindi, per il teorema di regolarità delle successioni monotone, ammette limite finito o $+\infty$. Se la successione convergesse al limite $L \in \mathbb{R}$, questo dovrebbe verificare l'equazione

$$L = L^2 + L - 2.$$

Risolvendo troviamo le radici $L_1 = -\sqrt{2}$ e $L_2 = \sqrt{2}$. Nessuna di questi valori è punto di accumulazione per la successione in quanto essa è crescente e quindi si mantiene sempre maggiore di 3 che a sua volta è maggiore di L_1 e L_2. Possiamo allora concludere che il limite della successione data è $+\infty$.

(2) Stabilire per quali valori del parametro reale α la seguente funzione risulta continua nel punto $x = \pi$ (prolungabile per continuità).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \log(1 + \pi - x)}{\cos x + e^{(x-\pi)^2}}, & \text{per } x > \pi, \\ \\ \dfrac{\sqrt{1 + 2(\pi - x)} - (\pi + 1 - x)}{\sqrt[3]{1 + \alpha(\pi - x)^2} - 1}, & \text{per } x < \pi. \end{cases}$$

Svolgimento

Si tratta di stabilire per quali valori di α i due limiti hanno lo stesso valore:

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x\,-\,\log(1\,+\,\pi\,-\,x)}{\cos x\,+\,e^{(x-\pi)^2}} \;=\; \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{1\,+\,2(\pi\,-\,x)}\,-\,(\pi\,+\,1\,-\,x)}{\sqrt[3]{1\,+\,\alpha(\pi\,-\,x)^2}\,-\,1}.$$

Dato che i limiti si presentano in una forma indeterminata calcoliamo ciascuno di essi effettuando il cambio di variabile $t = \pi - x$. Quindi per x che tende a π^+ risulta che t tende a 0^-, mentre per x che tende a π^- risulta che t tende a 0^+. Possiammo scrivere

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x\,-\,\log(1\,+\,\pi\,-\,x)}{\cos x\,+\,e^{(x-\pi)^2}} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(\pi - t)\,-\,\log(1\,+\,t)}{\cos(\pi - t)\,+\,e^{t^2}} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin t\,-\,\log(1\,+\,t)}{-\,\cos t\,+\,e^{t^2}}. \tag{1}$$

Mentre

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{1\,+\,2(\pi\,-\,x)}\,-\,(\pi\,+\,1\,-\,x)}{\sqrt[3]{1\,+\,\alpha(\pi\,-\,x)^2}\,-\,1} \;=\; \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1\,+\,2\,t}\,-\,(1\,-t)}{\sqrt[3]{1\,+\,\alpha t^2}\,-\,1}. \tag{2}$$

In questo modo possiamo risolvere l'indeterminazione effettuando lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nei limiti.

$$\begin{aligned}
&\sin t \;=\; t\,-\,\tfrac{1}{6}\,t^3\,+\,ot^3\\
&\cos \;=\; 1\,-\,\tfrac{1}{2}\,+\,o(t^2)\\
&e^{t^2} \;=\; 1\,+\,t^2\,+\,o(t^2)\\
&\log(1+t) \;=\; t\,-\,\tfrac{1}{2}\,t^2\,+\,o(t^2)\\
&\sqrt{1\,+\,2\,t} \;=\; 1\,+\,t\,-\,\tfrac{1}{2}\,t^2\,+\,o(t^2)\\
&\sqrt[3]{1\,+\,\alpha\,t^2} \;=\; 1\,+\,\tfrac{1}{3}\,\alpha\,t^2\,+\,o(t^2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Sostituendo nel limite (1), semplificando ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin t\,-\,\log(1\,+\,t)}{-\,\cos t\,+\,e^{t^2}} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \frac{-\frac{t^3}{6}\,+\,o(t^3)\,+\,\frac{t^2}{2}\,+\,o(t^2)}{\frac{3}{2}\,t^2\,+\,o(t^2)} \;=\\
&=\;\lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{t^2}{2}\,+\,o(t^2)}{\frac{3}{2}\,t^2\,+\,o(t^2)} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{3}{2}\,t^2} \;=\; \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Per il limite (2) si procede in maniera analoga:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1\,+\,2\,t}\,-\,(1\,-t)}{\sqrt[3]{1\,+\,\alpha t^2}\,-\,1} \;=\; \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}\,t^2\,+\,o(t^2)}{\frac{1}{3}\,\alpha\,t^2\,+\,o(t^2)} \;=\; -\,\frac{3}{2\,\alpha}. \tag{5}$$

Eguagliando i risultati dei limiti (4) e (5) otteniamo che

$$\alpha \;=\; -\,\frac{9}{2}.$$

(3) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_1^2 \log(\sqrt{x+1}\,+\,\sqrt{x-1})\;dx.$$

Svolgimento.

Procediamo mediantre integrazione per parti([1]) prendendo come $f(x) = x$, quindi $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)$.

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\, dx = \\
&= \left[x \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) dx = \\
&= 2\log(\sqrt{3}+1) - \log 2 - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \, \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \\
&= 2\log(\sqrt{3}+1) - \log 2 - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx.
\end{aligned} \tag{6}
$$

L'integrale ottenuto è di tipo improprio in quanto presenta una singolarità nel punto $x = 1$. Per risolvero procediamo utilizzando la definizione:

$$\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \lim_{c \to 1^+} \int_c^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx =$$

(si cambia variabile ponendo $t = x^2 - 1$, qiundi $dt = 2x\, dx$,
mentre per $x = c$, $t = c^2 - 1$, per $x = 2$, $t = 3$)

$$\lim_{c \to 1^+} \int_{c^2-1}^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{c \longrightarrow 1^+} [2\sqrt{t}]_{c^2-1}^3 = \lim_{c \to 1^+} \left[2\sqrt{3} - 2\sqrt{c^2-1}\right] = 2\sqrt{3}$$

In definitiva, sostituendo in (6):

$$\int_1^2 \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\, dx = 2\log(\sqrt{3}+1) - \log 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

[1]
$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$