Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 10 Settembre 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$\log(n!) \le n\,(\log n)^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(5 - \sqrt{x-1}\right) - x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{\sin 2x} + e^{\cos 2x}\right) \sin 4x \ \ dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti.

1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$\log(n!) \leq n\,(\log n)^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Svolgimento

Per $n = 1$ e $n = 2$ è banalmente vero. Proviamo per $n \geq 2$ l'induttività della proposizione, ovvero che

$$\log(n!) \leq n\,(\log n)^2 \;\text{ implica }\; \log[(n+1)!] \leq (n+1)\,[\log(n+1)]^2.$$

Applicando le proprietà dei logaritmi, osserviamo che:

$$\log[(n+1)!] = \log[(n!)\,(n+1)] = \log(n!) + \log(n+1) \leq$$

$$\text{(per l'ipotesi induttiva)}$$

$$\leq n\,(\log n)^2 + \log(n+1).$$

La proposizione è dimostrata se verifichiamo che

$$n\,(\log n)^2 + \log(n+1) \leq (n+1)\,[\log(n+1)]^2.$$

Ovvero

$$n\,(\log n)^2 + \log(n+1) \leq n\,[\log(n+1)]^2 + [\log(n+1)]^2.$$

Questa diseguaglianza è verificata perché si ottiene dalle seguenti, sommate membro a membro:

$$n[\log n]^2 \leq n[\log(n+1)]^2, \qquad \log(n+1) \leq [\log(n+1)]^2.$$

Infatti la prima segue dal fatto che la funzione logaritmo è monotona crescente, mentre la seconda da: $1 \leq \log(n+1)$, per ogni $n \geq 2$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(5 - \sqrt{x-1}\right) - x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.
Il campo di esistenza si ottiene risolvendo $5 - \sqrt{x-1} > 0$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} 25 > x - 1 \\ \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono i valori di x appartenenti all'intervallo $[1,\, 26)$.
Osserviamo che $f(1) = \log 5 \; - \; 1$, mentre $\lim_{x \to 26-} \; f(x) \; = \; -\infty$.
Studiamo la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{-1}{10\sqrt{x-1} - 2x + 2} \; - \; 1 \; = \; \frac{-10\,\sqrt{x-1} \; + \; 2x \; - 3}{10\sqrt{x-1} \; - \; 2x \; + \; 2}.$$

Per determinare gliintervalli dove $f'(x) > 0$, e quindi dove f è crescente risolviamo i sistemi

$$\begin{cases} 10\sqrt{x-1} < 2x - 3 \\ \\ 10\sqrt{x-1} > 2x - 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 10\sqrt{x-1} > 2x - 3 \\ \\ 10\sqrt{x-1} < 2x - 2 \end{cases}$$

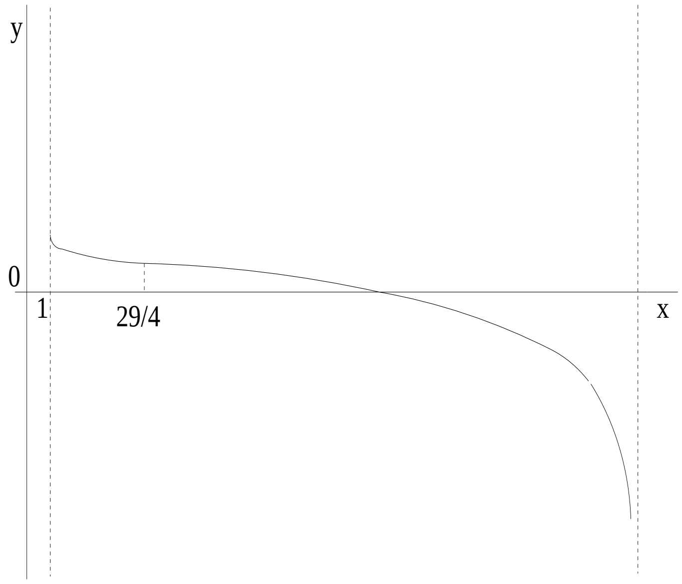
Il primo sistena non ammette soluzioni. Infatti si dovrebbe avere $2x - 3 > 2x - 2$ che equivale a dire che $3 < 2$, assurdo. Mentre il secondo non ammette soluzioni all'interno del campo di esistenza della soluzione. Di conseguenza, per ogni $x \in [1,\, 26)$ risulta $f'(x > 0)$, ovvero la funzione è decrescente.
In particolare si osservi che $\lim_{x \to 1+} \; f'(x) \; = \; -\infty$.
Determiniamo gli intervalli di concavità e convessità di f mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{1}{(10\sqrt{x-1} - 2x + 2)^2} \; \left(\frac{5}{\sqrt{x-1}} - 2 \right)$$

Da cui segue che $f''(x) > 0$ se

$$\frac{5}{\sqrt{x-1}} - 2 \; > 0 \iff 1 \leq x < \frac{29}{4}.$$

In questo intervallo f ̀convessa, mentre è concava in $\frac{29}{4}$, 26. Il punto $x_0 = \frac{29}{4}$ è di flesso.
Possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{\sin 2x} + e^{\cos 2x}\right) \sin 4x \quad dx.$$

Svolgimento.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{\sin 2x} + e^{\cos 2x}\right) \sin 4x \quad dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin 2x} \sin 4x \; dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos 2x} \sin 4x \quad dx =$$

(essendo $\sin 4x = 2\sin 2x \ \cos 2x$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin 2x}\, 2 \, \sin 2x \, \cos 2x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos 2x} \, 2 \, \sin 2x \, \cos 2x \; dx.$$

Nel primo integrale effettuiamo il seguente cambio di variabile: $t = \sin 2x$, da cui $dt = 2 \, \cos 2x \, dx$, ed inoltre se $x = 0$, $t = 0$, mentre se $x = \frac{\pi}{4}$, $t = 1$.
Nel secondo integrale effettuiamo il seguente cambio di variabile: $t = \cos 2x$, da cui $dt = -2 \, \sin 2x \, dx$, ed inoltre se $x = 0$, $t = 1$, mentre se $x = \frac{\pi}{4}$, $t = 0$. Possiamo scrivere:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin 2x}\, 2 \, \sin 2x \, \cos 2x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos 2x} \, 2 \, \sin 2x \, \cos 2x \; dx =$$

$$= \int_0^1 e^t \, t \; dt - \int_1^0 e^t \, t \; dt = 2 \int_0^1 e^t \; t \; dt =$$

(integrando per parti)

$$= 2[e^t \, t]_0^1 - 2 \int_0^1 e^t \; dt = 2.$$