Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 8 Gennaio 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Dimostrare per induzione che, per ogni $n > 1$, risulta

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{2\,\sin x - \sqrt{3}}.$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (t+1)\ \log(t^2+1)\ \ dx.$$

Risoluzione degli esercizi

1) Dimostrare per induzione che, per ogni $n > 1$, risulta

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \;<\; \binom{2n}{n}.$$

Svolgimento

Per $n = 2$ é vera perché

$$\frac{8}{\sqrt{2}} < \binom{4}{2} = 6.$$

Verifichiammo l'induttivitá della proposizione

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!n!(n+1)(n+1)} = \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} >$$

$$\text{(per l'ipotesi induttiva)}$$

$$> \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\,\frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

La tesi segue se dimostriamo la seguente diseguaglianza

$$\frac{4^n\,2\,(2n+1)}{2\sqrt{n}(n+1)} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Ovvero

$$(2n+1)\sqrt{n+1} > 2\sqrt{n}(n+1) \iff (4n^2+4n+1)(n+1) > 4n(n^2+2n+1) \iff$$

$$\iff (2n+1)^2(n+1) > 4n(n+1)^2 \iff (2n+1)^2 > 4n(n+1).$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\cos x}{2\,\sin x \;-\; \sqrt{3}}.$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di esistenza é costituito dai valori di x tali che $\sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ovvero $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ \frac{2}{3}\pi + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
La funzione é periodica di periodo 2π, basta quindi studiarla nell'intervallo $[0.2\pi]$.
I seguenti limiti indicano il comportamento della funzione nell'intorno dei punti dove essa non é definita.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{2\pi}{3}-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{2\pi}{3}+} f(x) = +\infty.$$

Calcolando la derivata prima siamo in grado di determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{-2 + \sqrt{3}\sin x}{(2\sin x - \sqrt{3})^2}.$$

Risulta che $f'(x) < 0$ se $2\sin x < 2$, cioé $\sin x < \frac{2}{\sqrt{3}}$, Ma $\sin x \leq 1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$, quindi per ogni x del campo di esitenza $f'(x) < 0$, di conseguenza la funzione decresce su ciascuno degli intervalli che costituisconno il suo dominio. Calcoliamo la derivata seconda per trovare gli intervalli di convessitá e di concavitá della funzione.

$$f''(x) = \frac{\cos x\,(-2\sqrt{3}\sin x\ +\ 5)}{(2\sin x - \sqrt{3})^3}.$$

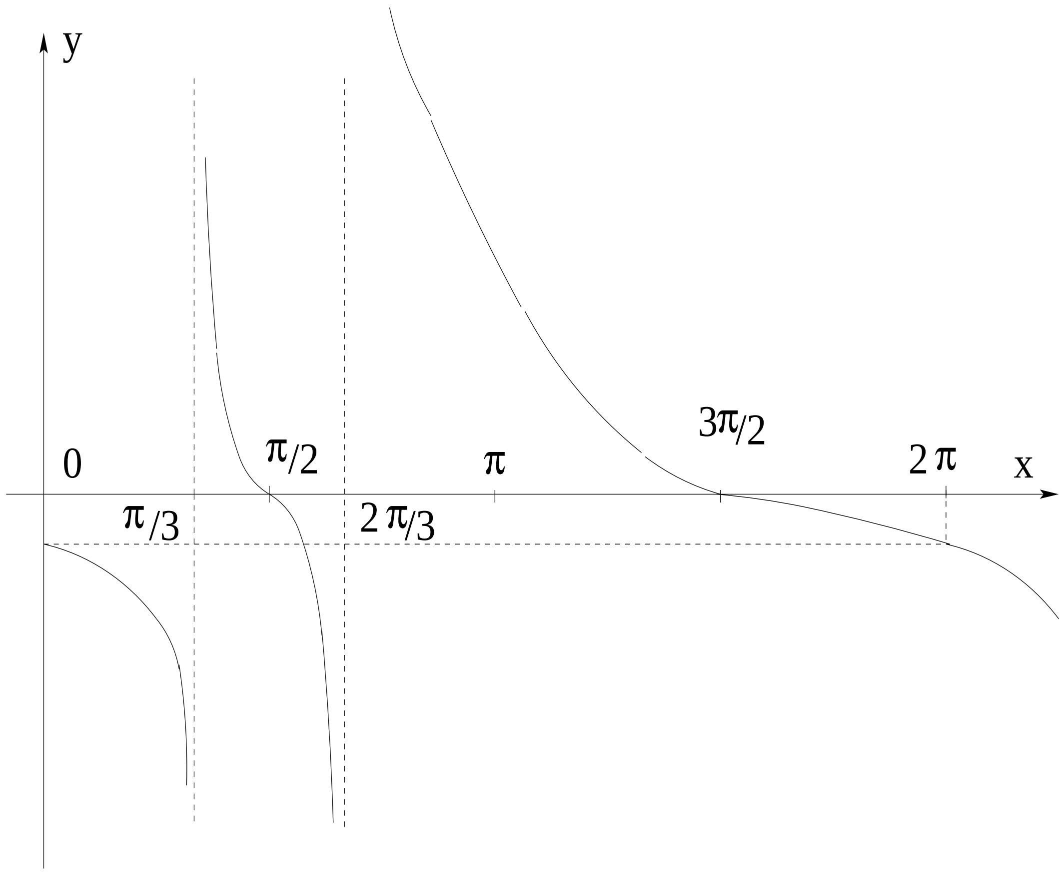
Studiamo il segno di f''. Per prima cosa si osserva che $-2\sqrt{3}\sin x + 5$ é sempre positiva in quanto $5 > 2\sqrt{3}$. Risolviamo i seguenti sistemi per determinare gli intervalli dove $f'' > 0$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \\ 2\sin x - \sqrt{3} > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \\ 2\sin x - \sqrt{3} < 0. \end{cases}$$

Possiamoo dedurre che

$$f''(x) > 0 \ \text{ se } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}, \ \text{oppure } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Su questi intervalli la funzione é convessa mentre é concava negli altri. In particolare i punti $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ sono di flesso.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico.



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+1)\ \log(x^2+1)\ \ dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo le primitive della funzione integranda mediante l'integrazione per parti ([1]) prendendo $f'(x) = x+1$ e $g(x) = \log(x^2+1)$ da cui, se $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ e $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, possiamo scrivere

$$\int (x+1)\ \log(x^2+1)\ \ dx \ = \ \left(\frac{1}{2}x^2 \ + \ x\right)\ \log(x^2+1) \ - \ \int \ \frac{x^3+2x^2}{x^2+1}.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ha che

$$\frac{x^3+2x^2}{x^2+1} \ = \ x+2 \ - \ \frac{x+2}{x^2+1},$$

e quindi

[1] $\int f'(x)\ g(x)\ \ dx \ = \ f(x)\,g(x) \ - \ \int f(x)\ g'(x)\ \ dx.$

$$\int \frac{x^3+2x^2}{x^2+1} = \int (x+2)\ dx - \int \frac{x+2}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\ \arctan x\ + C.$$

Tornando all'integrale di partenza possiamo scrivere

$$\int (x+1)\ \log(x^2+1)\ \ dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\ \log(x^2+1) + 2\ \arctan x\ + C,$$

da cui, calcolando la funzione ottenuta agli estremi dell'intervallo di integrazione, risulta

$$\int_0^1 (x+1)\ \log(x^2+1)\ \ dx = 2\ \log\ 2 - \frac{5}{2} + \frac{\pi}{2}.$$