Corso di Laurea in FISICA

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 15 GENNAIO 2013

((1) Dimostrare che

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1}, \quad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \cdots)$$

Svolgimento

Procediamo per induzione

Se $n = 2$ la diseguaglianza é vera perché assume la forma

$$\binom{4}{2} > \frac{16}{3} \iff 6 > \frac{16}{3} \iff 18 > 16.$$

Dimostriamo l'induttivitá della proposizione, ossia

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1} \Longrightarrow \binom{2n+2}{n+1} > \frac{2^{2(n+1)}}{n+2}.$$

Consideriamo quindi il primo membro della seconda diseguaglianza.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{(2n)!2(2n+1)}{n!n!(n+1)} = \binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1} >$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$> \frac{2^{2n}}{n+1}\,\frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

La tesi ́dimostrata se proviamo che

$$\frac{2^{2n}}{n+1}\,\frac{2(2n+1)}{n+1} > \frac{2^{2n+2}}{n+2}$$

Ovvero

$$(2n+1)(n+2) > 2(n+1)^2 \iff n > 0.$$

Che é vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus 0$.

(2) Determinare i numeri complessi z e w tali che

$$\begin{cases} |z|^2\, w \,+\, |w|^2\, z \,=\, 2i\,\sqrt{3} \\ z\, w \,=\, -i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Svolgimento

(3) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ \\ a_{n+1} = 3\sqrt[3]{a_n - 1} + 3. \end{cases}$$

Svolgimento

La successione é ben definita perché é maggiore o uguale a 2. Infatti $a_2 > 2$. Se $a_n \geq 2$ allora é evidente che anche $a_{n+1} \geq 2$.
Verifichiamo che la successione é monotona crescente procedendo per induzione.Infatti $a_2 = 6 > a_1 = 2$.
L'induttività segue dalle seguenti considerazioni

$$a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n < a_{n+1}.$$

Infatti

$$a_n < a_{n+1} \iff 3\sqrt[3]{a_{n-1} - 1} + 3 < 3\sqrt[3]{a_n - 1} + 3 \iff a_{n-1} < a_n.$$