Compito di Analisi Matematica I+II del 12 giugno 2013

Corso di Laurea in Fisica a. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.
1) Al variare del parametro α, studiare la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n^3 - \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{6} \end{cases}$$

e calcolarne il limite.

Svolgimento

La successione è ben definita dato che la definizione ricorsiva è costituita da un polinomio. La variabile n non compare esplicitamente nell'espressione, possiamo quindi considerare la funzione associata alla successione, ovvero

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}.$$

Questa è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è crescente. Infatti basta calcolare la sua derivata prima

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2},$$

ed osservare che risulta sempre positiva in quanto $x^2 - 2x + 3 > 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo $\Delta < 0$.
Per stabilire l'andamento della successione, iniziamo considerando i suoi due primi termini e li confrontiamo tra loro al variare del parametro α. Ossia, ad esempio $a_1 < a_2$ che equivale a dire

$$a_2 = \frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{6} > a_1 = \alpha,$$

da cui

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 > 0 \iff (\alpha - 1)^3 > 0 \iff \alpha > 1.$$

Quindi se $\alpha > 1$ risulta $a_2 > a_1$. Vediamo se la stessa situazione si presenta per i termini successivi ossia se $a_n > a_{n-1}$. A tale scopo possiamo procedere per induzione, e dato che il primo passo è stato già verificato dimostriamo l'induttività della proposizione, cioé

$$a_n > a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Ma questa è una banale conseguenza di quanto dimostrato sopra. Infatti dato che $a_n = f(a_{n-1})$ e $a_{n+1} = f(a_n)$ risulta, per la monotonia di f,

$$a_n > a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} = f(a_n) > a_n = f(a_{n-1}).$$

La successione riulta monotona decrescente per $\alpha > 1$.

Ragionando in modo del tutto analogo si stabilisce che la sucecssione risulta monotona decrescente per $\alpha < 1$.
Per il teorema di regolarità delle successoni monotone essa ammette dunque limite. Se questo fosse un valore L reale dovrebbe risolvere l'equazione che si trova passando al limite nella successione ricorsiva, ovvero

$$L = \frac{1}{6}L^3 - \frac{1}{2}L^2 + \frac{3}{2}L - \frac{1}{6} \iff (L-1)^3 = 0 \iff L = 1.$$

Questa non è accettabile in alcuno dei casi esaminati sopra perché $L = 1$ non è punto di accumulazione per la successione, tranne nel caso che $\alpha = 1$. Infatti in questo caso si verifica facilmente (per induzione) che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. Se $\alpha > 1$, si ha $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, se invece $\alpha < 1$ si ha $1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$.
In definitiva se $\alpha > 1$, dato che la successione è monotona crescente il suo limite è $+\infty$, mentre se $\alpha < 1$, dato che è decrescente il suo limite è $-\infty$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato dai valori di x che rendono maggiore o uguale a zero l'espressione sotto radice e dai valori che rendono diverso da zero il denominatore della frazione. Quindi

$$C.E. = \{x \in R : \ \ x > 4 \text{ oppure } x \leq 0\}.$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to 4+} f(x) = +\infty.$$

Valutiamo l'esistenza di asintoti del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-4}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1 + \frac{4}{x-4}} - x =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x-4} + o\left(\frac{1}{x-4}\right)\right] - x = 2.$$

Qui sopra abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $t = \frac{1}{x-4}$.
Quindi l'asintonto per x che tende a più infinito è

$$y = x + 2.$$

Nello stesso modo per x che tende a meno infinito si ha

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-4}} + x = \lim_{x \to +\infty} (-x)\sqrt{1 + \frac{4}{x-4}} + x =$$
$$\lim_{x \to +\infty} (-x) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{4}{x-4} + o\left(\frac{1}{x-4} \right) \right] + x = -2.$$

Quindi l'asintonto per x che tende a meno infinito è

$$y = -x - 2.$$

Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli dimonotonia della funzione.

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x}} \frac{|x|(x-6)}{(x-4)^2}.$$

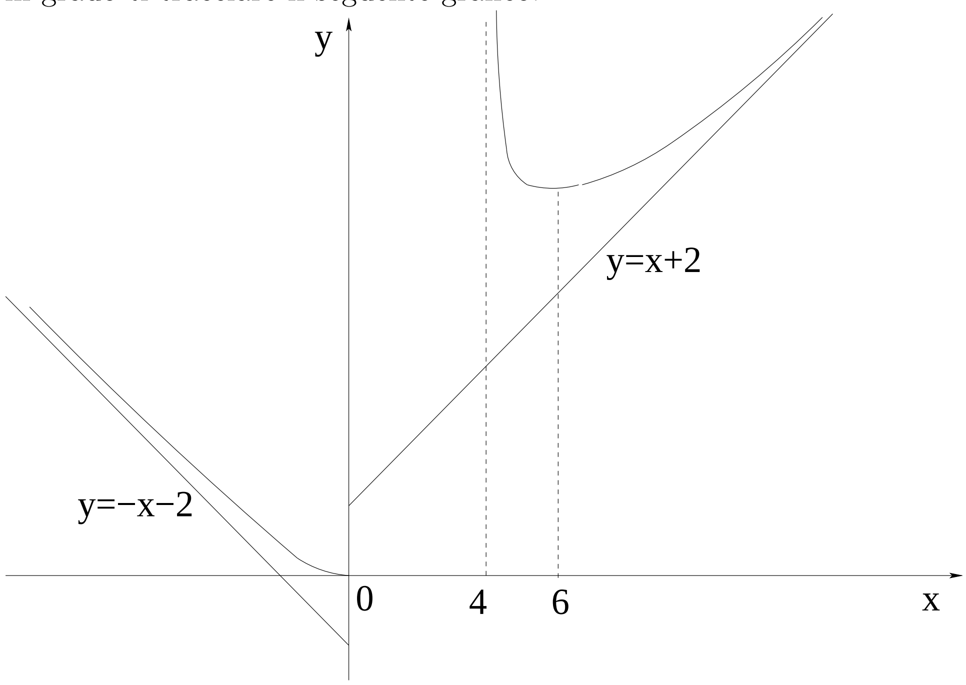
Risulta $f'(x) > 0$ per $x > 6$, $f'(x) < 0$ per $x < 6$. Quindi la funzione è crescente su $(6, +\infty)$ e decrescente su $(4, 6)$ e $(-\infty, 0]$. Il punto $x = 6$ è di minimo relativo e $f(6) = 6\sqrt{3}$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 0.$$

calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavità e convesità di f.

$$f''(x) = \sqrt{\frac{(x-4)^3}{x}} \frac{1}{|x-4|^3} \left(|x| - \frac{(x+2)(x-6)}{|x-4|} \right),$$

Osserviamo che $f''(x) > 0$ per $|x||x-4| > (x+2)(x-6)$, che è verificata per ogni valore di x apaprtenente al C. E. di f. Quindi la funzione è convessa su $(-\infty, 0]$ e su $(4, +\infty)$.
Siamo ora in grado ti tracciare il seguente grafico.



3) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}\;\log\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

a) Stabilire mediante studio a priori se è integrabile secondo Riemann nell'intervallo

$$\left(\frac{1}{2}\,,\,1\;\right]$$

b) Calcolare

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\;\,dx.$$

Svolgimento

a) Osserviamo che f risulta continua sull'intervallo considerato, inoltre

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}+} \frac{x-\frac{1}{2}+o(x-\frac{1}{2})}{2|x|\sqrt{x+\frac{1}{2}}\sqrt{x-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Possiamo prolungare f all'intervallo chiuso ponendo

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x),\;\text{ se } x\in(\frac{1}{2},1], \\ \\ 0,\;\text{ se } x=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

In questo modo otteniamo una funzione continua sull'intervallo chiuso e quindi integrabile su tale intervallo. Di conseguenza anche f è integrabile.

b) Procediamo integrando per parti osservando che

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4x^2-1} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\overline{f}(x)\;\,dx \;=\; 2\left[\sqrt{4x^2-1}\;\log(x+\frac{1}{2})\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \;-\; \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{4x^2-1}\;\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\;\,dx =$$

$$= 2\sqrt{3}\;\log\frac{3}{2}\;-\;4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\;dx \;=\; 2\sqrt{3}\;\log\frac{3}{2}\;-\;4\int_{1}^{2}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\;dt \;=$$

$$\left(\text{poniamo } u^2=\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\;\log\frac{3}{2}\;-\;2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\;du.$$

Applichiamo la formula di Hermite

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} + \frac{d}{dx}\frac{Cu+D}{1-u^2}.$$

Risolvendo otteniamo $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 0$. Sostituendo otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\ du = \sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3}).$$

In definitiva

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \overline{f}(x)\ dx = 2\sqrt{3}(\log 3 - \log 2 - 1) + 2\log(2+\sqrt{3}).$$