Compito di Analisi Matematica I+II del 3 Luglio 2013

Corso di Laurea in Fisica a. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.

1) Determinare le coppie di soluzioni $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ che risolvono

$$\begin{cases} w^7 - \overline{z}^{\,3} = 1 \\ \overline{w}^{\,7} + z^3 = i \\ Re\, z > 0 \\ Im\, z > 0 \\ Re\, z > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Svolgimento

Consideriamo il complesso coniugato della seconda equazione e lo sommiamo alla prima ottenendo:

$$2\, w^7 = 1 - i \quad \Longleftrightarrow \quad w^7 = \frac{1-i}{2} \Longleftrightarrow w \in \sqrt[7]{\frac{1-i}{2}}.$$

Per calcolare le radici settime di $\frac{1-i}{2}$ scriviamo questo numero in forma trigonometrica

$$\frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

ed applichiamo la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso ottenendo

$$w \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[14]{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{7} \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{7} \right) \right], \quad k = 0, 1, \cdots, 6 \right\}.$$

Di queste sette radici l'unica che risolve le condizioni $Re\, w > 0$ e $Im\, w > 0$ è

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[14]{2}} \left(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi \right).$$

Infatti imponendo le condizioni alle radici trovate si ha il sistema

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{7} \right) > 0 \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{7} \right) > 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \cdots, 6$$

ovvero

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{7} < \dfrac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad \dfrac{3}{2}\pi < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{7} < 2\pi \\ \\ 0 < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{7} < \pi \end{cases} , \quad k = 0, 1 \cdots , 6.$$

Da cui deduciamo che l'unica soluzione è quella che si ottiene per $k = 0$.
Al fine di determinare z, sostituiamo il valore di $\overline{w}^{\,7}$ nel sistema riconducendoci alla risoluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{1+i}{2} + z^3 = i \\ Re\, z > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava

$$z^3 = \frac{-1+i}{2} \iff z \in \sqrt[3]{\frac{-1+i}{2}}$$

Le radici cubiche di $\frac{-1+i}{2}$ si trovano scrivendo questo numero in forma trigonometrica e poi applicando la formula citata sopra:

$$\frac{-1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right).$$

$$z \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Imponiamo a queste radici la condizione $Rez > 0$ risolvendo l'equazione

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \right) > \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2,$$

che equivale a

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \quad \text{oppure} \quad \frac{5}{3}\pi < \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} < 2\pi, \quad k = 0, 1, 2$$

Queste disequazioni sono verificate solo per $k = 0$.
In definitiva il sistema ammette come unica soluzione la coppia

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt[14]{2}\,\sqrt{2}}, \frac{i+i}{\sqrt[6]{2}\,\sqrt{2}} \right).$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \log |\sin x - \sqrt{3} \cos x|.$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento.
La funzione è periodica di periodo 2π. È sufficiente studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Il campo di esistenza è dato dai valori che rendono diverso da zero l'argomento del logaritmo, ossia tali che

$$\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \,\neq\, 0 \iff \tan x \neq \sqrt{3} \iff x \neq \frac{\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{4}{3}\pi.$$

Quindi, nell'intervallo considerato otteniamo che

$$C.E. = \{x:\ \ x \neq \frac{\pi}{3},\ \text{e } x \neq \frac{4}{3}\pi\}.$$

Vediamo come si compoprta la funzione agli estremi del suo C. E. mediante il calcolo dei valori assunti o dei limiti.

$$f(0) = \frac{1}{3}\log 3;\ \ f(2\pi) = \frac{1}{3}\log 3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{4\pi}{3}-} f(x) = -\infty.$$

Determiniamo l'intersezione con l'asse delle ascisse ed il segno della funzione risolvendo l'equazione

$$\log|\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x| \,\geq\, 0,$$

ossia

$$|\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x| \geq 1,$$

che equivale a

$$\begin{cases} \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \geq 0 \\ \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \geq 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \leq 0 \\ -(\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x) \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Poniamo $Y = \sin x$ e $X = \cos x$ e risolviamo il primo di questi due sistemi.

$$\begin{cases} Y \,-\, \sqrt{3}\,X \geq 0 \\ \\ Y \,-\, \sqrt{3}\,X \geq 1 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} Y \,-\, \sqrt{3}\,X \geq 1 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date dalle coppie (X, Y) della circonferenza unitaria che sono situate al di sopra della retta $Y = \sqrt{3}X + 1$. Determiniamo le intersezioni tra retta e circonferenza risolvendo il sistema

$$\begin{cases} Y \,-\, \sqrt{3}\,X = 1 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} Y \,=\, \sqrt{3}\,X + 1 \\ \\ 1 + 3X^2 + 2\sqrt{3}X + X^2 \geq 1. \end{cases}$$

Da questo segue

$$X(2X + \sqrt{3}) = 0,$$

Da questa otteniamo le soluzioni del sistema: $(X_1, Y_1) = (0, 1)$ $(X_2, Y_2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Tenuto conto della posizione fatta su X e Y:

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi.$$

Consideriamo il secondo dei dei sistemi di (1). Procedendo in maniera analoga troviamo

$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi + \frac{\pi}{6}.$$

Calcoliamo ora la derivata prima ricordando che

$$\frac{d}{dx} \log |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x} = \frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{\tan x - \sqrt{3}}.$$

Determiniamo gli intervalli di monotonia risolvendo

$$f'(x) > 0,$$

ossia

$$\frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{\tan x - \sqrt{3}} > 0,$$

che è equivalente a risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{3} \tan x > 0 \\ \\ \tan x - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 + \sqrt{3} \tan x < 0 \\ \\ \tan x - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ oppure } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3}{2},$$

quelle del secondo

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \text{ oppure } \frac{3}{2}\pi < x < \frac{11}{6}\pi.$$

Tenuto conto che $f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{3}{2}\pi) = \sqrt{3} > 0$, possiamo concludere che $f'(x) > 0$ sugli intervalli

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi \text{ e } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{11}{6}\pi.$$

In ciascuno di questi intervalli la funzione è crescente. Mentre la funzione è decrescente in ciascuno degli intervalli:

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{oppure} \quad \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ oppure } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$$

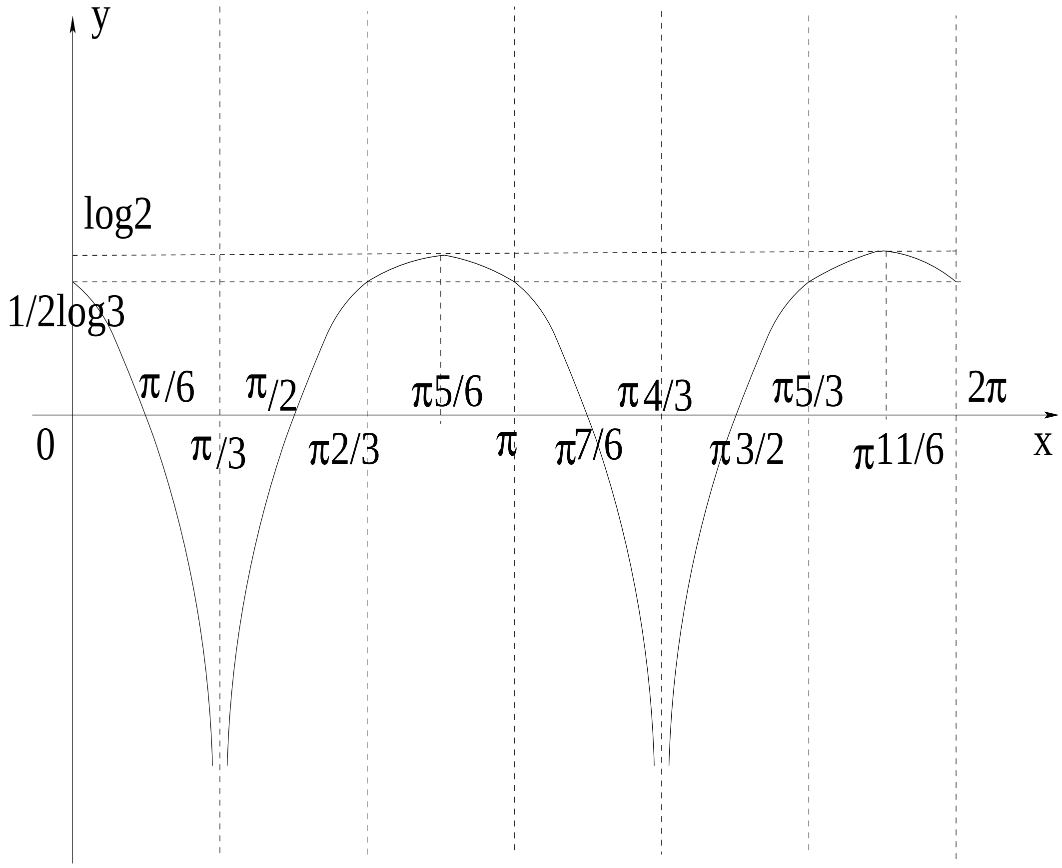
Da questo segue che i punti $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$ sono di massimo.
Derivata seconda

$$f''(x) \;=\; -\,\frac{4}{(\sin x \;-\; \sqrt{3}\,\cos x)^2}$$

è sempre negativa, quindi la funzione è concava sugli intervalli

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \;;\; \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) ; \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

Possiamo ora tracciare il seguente grafico approssimato della funzione.



OSSERVAZIONE.
La funzione data può anche essere scritta nella forma

$$f(x) = \log|2\,\sin(x - \frac{\pi}{3})|.$$

Infatti basta utilizzare le formule di sottrazione del *seno*.
Si provi a studiare la funzione scritta in questa forma.

3) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+2x}{1+3x}}\ dx.$$

Svolgimento.

Eseguiamo il seguente cambio di variabile

$$t^2 \ = \ \sqrt{\frac{1+2x}{1+3x}},$$

da cui

$$x \ = \ \frac{1-t^2}{3t^2-2}, \quad dx \ = \ \frac{-\,2t}{(3t^2-2)^2}\,dt$$

sostituendo ci riconduciamo alla risoluzione di

$$\int \frac{-2\,t^2}{(1-t^2)^2}\ dt.$$

La funzione integranda è di tipo razionale. Possiamo utilizzare una variante della formula di Hermite, ossia dobbiamo determinare i parametri reali A, B, C, D tali che valga l'identitá seguente per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{-2t^2}{(1-t^2)^2} \ = \ \frac{A}{t-1} \ + \ \frac{B}{t+1} \ + \ \frac{C}{(t-1)^2} \ + \ \frac{D}{(t+1)^2}.$$

Ovvero

$$A(t-1)(t+1)^2 \ + \ B(t+1)(t-1)^2 \ + \ C(t+1)^2 \ + \ D(t-1)^2 \ = \ -2t^2.$$

Per facilitare la risoluzione assegnamo a t i valori $t=1$, $t=-1$, $t=0$, $t=2$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} 4C = -2 \\ 4D = -2 \\ B - A = 1 \\ 3A + B = -1. \end{cases}$$

Da cui $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$. Sostituiamo sopra

$$\int \frac{-2t^2}{(1-t^2)^2}\ dt = \int \frac{-1}{2(t-1)}\,dt + \int \frac{1}{2(t+1)}\,dt - \int \frac{1}{2(t-1)^2}\,dt - \frac{1}{2(t+1)^2}\,dt \ =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t-1| \ + \ \frac{1}{2}\log|t+1| \ + \ \frac{1}{2(t-1)} \ + \ \frac{1}{2(t+1)} \ + \ C.$$

Tenuto conto delle posizioni fatte otteniamo infine

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+2x}{1+3x}}\ dx \ = \ -\frac{1}{2}\ \log\left|\sqrt{\frac{1+2x}{1+3x}} - 1\right| + \frac{1}{2}\log\left|\sqrt{\frac{1+2x}{1+3x}} + 1\right| +$$

$$+\frac{\sqrt{1+3x}}{2(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x})} + \frac{\sqrt{1+3x}}{2(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x})} \ + \ C.$$