Analisi Matematica (Corso D)
CdL in Informatica

Prova scritta del 4/6/2003

(1) Calcolare, mediante il polinomio di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2 \; + \; 2\cos x \; - \; 2}{x^2 - \log(1 + x^2)}$$

(2) Data la funzione:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}}$$

studiarne l'andamento e tracciarne un grafico approssimato.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin(3\sqrt{x} \; + \; 2) \; dx.$$

(4) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{x^{4n} + 1}.$$

Risoluzione degli esercizi proposti.
(1) Calcolare, mediante il polinomio di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \; + \; 2\cos x \; - \; 2}{x^2 - \log(1+x^2)}$$

Svolgimento.
Consideriamo gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3);$$
$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2);$$

Sostituendo $t = x^2$ si ottiene:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6);$$
$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4);$$

Inoltre ricordiamo che:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$$

Sostituiamo le espressioni ottenute nel limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) + 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12}}{\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Al numeratore del primo limite i termini $-\frac{x^6}{6}$, $o(x^6)$ sono infinitesimi di ordine superiore a x^4, per $x \to 0$, vengono quindi inclusi nel termine $o(x^4)$.

(2) Data la funzione:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}}$$

studiarne l'andamento e tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

Iniziamo determinando il dominio della funzione, che in questo caso risulta molto semplice, basta infatti escludere il punto in cui si annulla il denominatore della frazione che costituisce l'argomento dell'esponenziale. Quindi:

$$Dom\, f \; = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Calcoliamo il limite agli estremi del dominio della funzione data.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

Perche' posto

$$y = \frac{x^2+x-2}{x-3},$$

si ha che $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$. Analogamente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

Perche'

$$y = \frac{x^2+x-2}{x-3},$$

si ha che $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$. Infatti, ad esempio utilizzando il teo. dell'Hospital: $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{1} = -\infty$. Nell'intorno del punto $x = 3$ si ha

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

Perche' se

$$y = \frac{x^2+x-2}{x-3},$$

segue che $\lim_{x\to 3-} y = -\infty$. Infatti il numeratore della frazione in un intorno di $x = 3$ risulta sempre positivo mentre il denominatore tende a 0^-.

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$$

Anche in questo caso si pone

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3},$$

e si ha che $\lim_{x\to 3+} y = +\infty$. Il numeratore della frazione e' positivo, mentre il denominatore tende a 0^+.

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}} D\left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 3}\right) = e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}} \quad \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}$$

Il segno della derivata prima e' determinato dal segno del numeratore della frazione, quindi: $f'(x) > 0$ per $x > 3 + \sqrt{10}$ e $x < 3 - \sqrt{10}$, da cui deduciamo che in questi intervalli la funzione data risulta crescente; $f'(x) < 0$ per $3 - \sqrt{10} < x < 3$ e $3 < x < 3 + \sqrt{10}$, dove f risulta decrescente.

Calcoliamo l'andamento della derivata prima in un intorno sinistro di $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3-} e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}} \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3-} e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 3}\right)^2 \lim_{x\to 3-} \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{10} \lim_{x\to 3-} e^{\frac{x^2+x-2}{x-3}} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 3}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 3-} f'(x) = \lim_{y\to -\infty} e^y y^2 = 0$$

Perche' posto

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3},$$

si ha che $\lim_{x\to 3-} y = -\infty$.

In definitiva il grafico della funzione e' del tipo:

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin(3\sqrt{x}\ +\ 2)\ dx.$$

Svolgimento.
Risolviamo l'integrale effettuando il seguente cambiamento di variabile: $3\sqrt{x}+2=t$, da cui:

$$x=\left(\frac{t-2}{3}\right)^2,\ dx=\frac{2}{9}\,(t-2)\ dt.$$

sostituiamo nell'integrale proposto ed effettuiamo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{9}\,(t-2)\ \sin t\ \ dt &= -\frac{2}{9}(t-2)\ \cos t\ +\ \frac{2}{9}\ \int\ \cos t\ dt = \\ &= -\frac{2}{9}\,(t-2)\ \cos t\ +\ \frac{2}{9}\ \sin t + C =\end{aligned}$$

Sostituiamo al posto di t l'espressione sopra:

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{x}\,\cos(3\sqrt{x}+2) + \frac{2}{9}(3\sqrt{x}+2) + C.$$

(4) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{x^{4n}+1}.$$

Svolgimento.

Considero il caso in cui $|x| > 1$. Ricordiamo che $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty$, ed osserviamo che il termine generale della serie e' infinitesimo, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{x^{4n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{x^{4n}\left(1+\frac{1}{x^{4n}}\right)} = 0$$

La serie proposta e'a termini positivi possiamo applicare il criterio del limite confrontando il termine generale della serie data con il termine generale della serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$$

Che e' convergente perche' e' di ragione $\frac{1}{x^2} < 1$. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^{2n}}{x^{4n}+1}}{\frac{1}{x^{2n}}} = 1.$$

Essendo il limite reale e diverso da zero le due serie si comportano nella stessa maniera quindi anche la serie proposta e'convergente.

Consideriamo ora il caso $|x| < 1$, essendo la serie a termini non negativi possiamo applicare il criterio del confronto:

$$\frac{x^{2n}}{x^{4n}+1} \le x^{2n}.$$

L'espressione al secondo membro della disequazione e' il termine generale di una serie geometrica, di ragione $|x^2| < 1$, che e' convergente.

L'ultimo caso da considerare e' $|x| = 1$. La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Che e'una serie divergente.