ANALISI MATEMATICA - CORSO R - CdL INFORMATICA

PROGRAMMA SVOLTO NELL'A.A. 2007/08

Introduzione.

Generalità sulle proposizioni e sui connettivi logici. L'uso dei quantificatori e la negazione di una proposizione. La dimostrazione per assurdo. Il linguaggio degli insiemi. Il principio di induzione. Le proprietà del simbolo di sommatoria. Il fattoriale ed i coefficienti binomiali.

I numeri reali.

Assiomi algebrici, assiomi di ordinamento.Insiemi limitati. Definizioni di massimi, minimi, maggioranti e minoranti di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Definizione di estremo superiore ed inferiore, loro caratterizzazione e proprietà. Assioma di continuità o completezza di $\mathbb{R}$. Insiemi contigui ed insiemi separati. Dimostrazione del teorema sugli insiemi contigui.

I numeri complessi

Il corpo dei numeri complessi. Forma algebrica e forma trigonometrica dei complessi. Significato geometrico. Operazioni con i numeri complessi. Dimostrazione della formula di De Moivre. Dimostrazione della formula delle radici ennesime dei numeri complessi.

Generalità sulle funzioni.

Numenclatura relativa alle funzioni: dominio, immagine, campo di esitenza, iniettività, surgettività, bigettività, invertibilità, monotonia. Composizione di funzioni.
Esempi del grafico di funzioni notevoli.
Definizione di massimo e di minimo di una funzione e di estremo superiore ed inferiore.
Numenclatura relativa alle successioni.

Teoria dei limiti

La retta reale estesa. Gli intorni in $\mathbb{R}$. Punto di accumulazione.
Definizione di limite. Esplicitazione della definizione nei vari casi. Definizione di limite per una successione.
Dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass.
Enunciato e dimostrazione dei seguenti teoremi sui limiti: unicità, permanenza del segno, passaggio al limite in una disequazione, confronto, una funzione che ha limite finito è limitata, il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è un infinitesimo, una restrizione ha lo stesso limite della funzione definita su tutto il suo C.E. teorema di regolarità delle funzioni monotone, limite di funzioni composte.
Esempi di funzioni che non hanno limite.
Dimostrazione dei teoremi riguardanti le operazioni con i limiti. Le forme indeterminate.
Il confronto di infinitesimi. Il simbolo di Landau. Dimostrazione del pricipio di sostituzione degli infinitesimi.

Le funzioni continue

Definizione di funzione continua in un punto ed in un intervallo. Operazioni con le funzioni continue. Dimostrazione del teorema della permanenza del segno, del teorema di Weierstrass, del teorema degli zeri, del teorema di Darboux, del teorema dei valori intermedi. Dimostrazione del teorema della monotonia di una funzione continua ed invertibile, dimostrazione del teorema sulla continuita' dell'inversa.

Calcolo differenziale
Definizione di derivata e suo significato geometrico.Dimostrazione del teorema che la derivabilità implica la continuità. Dimostrazione dell'equivalenza tra differenziabilità e derivabilità. Dimostrazione delle formule di derivazione di una somma, di un prodotto e di un rapporto di funzioni. Dimostrazione del teorema di derivazione di funzioni composte e della funzione inversa. Dimostrazione dei teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy. Dimostrazione del teorema sulla monotonia delle funzioni che hanno derivata prima di

segno costante. Dimostrazione del teorema dell'Hospital nel caso della variabile che tende ad un valore finito. Definizione di funzione concava o convessa su di un intervallo. Dimostrazione dei teoremi che legano la derivata secoonda alla convessità o alla concavità. Formula per il calcolo degli asintoti. Dimostrazione di un criterio di derivabilità. Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Peano. Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Lagrange.

Calcolo integrale

Integrali indefiniti: definizione di primitiva, dimostrazione del teorema sulla differenza di due primitive di una stessa funzione. Esempi di funzioni che non ammettono primitive. Proprietà di linearità dell'integrale indefinito. Dimostrazione della formula di integrazione per parti. Formula di cambiamento di variabile negli integrali indefiniti.
Integali definiti: definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Proprietà di linearità, monotonia, assoluta continuità dell'integrale. Dimostrazione del teorema sulla media integrale e del teorema fondamentale del calcolo intergale.
Integrali impropri: definizione di integrale improprio su di una semiretta e su di un intervallo e sue proprietà. Dimostrazione del teorema del confronto e del criterio del limite per gli integrali impropri. Assoluta integrabilitá.

Serie numeriche

Definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata, e di serie assolutamente convergente. Dimostrazione della condizione necessaria per la convergenza di una serie. Esempi di serie: le serie armoniche e geometriche. Dimostrazione del criterio del confronto, del limite e del criterio integrale. Dimostrazione del criterio del rapporto, della radice ennesima e della convergenza assoluta. Dimostrazione del criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno.

Equazioni differenziali

Proprietà delle soluzioni e formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine.
Proprietà delle soluzioni delle equazioni lineari del secondo ordine.
Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine omogenee con coefficienti costanti mediante il metodo del polinomio caratteristico.
Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine non omogenee con coefficienti costanti con secondo membro di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico.
Il teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy.
Metodo risolutivo per le equazioni differenziali a variabili separabili.