Prova parziale scritta del 19/12/2003

Risoluzione degli esercizi sui limiti

FILA 1

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)-\sin x^2}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$$

Consideriamo gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite nel modo che segue:

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Sostituendo nel limite proposto si ottiene:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)-\sin x^2}{\left(e^{x^2}-1\right)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)}{\left(x^2+o(x^2)\right)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^4} = -\frac{1}{2}$$

Nei calcoli eseguiti sopra abbiamo tenuto conto di alcune proprietà degli o-piccoli:

$$o(x^4) + \frac{x^6}{6} + o(x^6) = o(x^4)$$

$$\left(x^2+o(x^2)\right)^2 = x^4 + 2x^2 o(x^2) + [o(x^2)]^2 = x^4 + o(x^4)$$

Infatti: $x^6 = o(x^4), o(x^6) = o(x^4)$ e $o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$; $x^2 o(x^2) = o(x)^4$, $[o(x^2)]^2 = o(x^4)$.

FILA 2

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x^2 - x^2}{2\cos x - 2 + \log(1+x^2)}$$

Sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$\arctan x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$2\cos x = 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Sostituendo queste espressioni nel limite proposto, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^6) - x^2}{2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) + 2 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^6}{3} + o(x^6)}{-\frac{5x^4}{12} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^6}{3}}{-\frac{5x^4}{12}} = 0$$

FILA 3

$$\lim_{x\to 0+} \frac{xe^x - \sin x - x^2}{2\log(1+x) - 2\arctan x + x^2}$$

Sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$2\log(1+x) = 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$2\arctan x = 2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Sostituendo queste espressioni nel limite proposto, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{4}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{3}x^3}{\frac{4}{3}x^3} = \frac{1}{2}$$

FILA 4

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^3) - e^{x^3} + 1}{\sin x^2 - x^2}$$

Sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$\log(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Sostituiamo nel limite queste espressioni:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6) - 1 - x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6) + 1}{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x^2} == \lim_{x\to 0+} \frac{-x^6 + o(x^6)}{-\frac{x^6}{6} + o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^6}{-\frac{x^6}{6}} = 6$$