Svolgimento degli esercizi N. 1

Prova scritta parziale n.2 del 20/12/2002

Fila 1 Determinare, mediante la formula di Taylor, il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^2 - x^2}{[\log(1+x^3)]^2}.$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite proposto.

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

posto $y = x^2$ (per $x \to 0$, $y \to 0$)

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Mentre

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

posto $y = x^3$ (per $x \to 0$, $y \to 0$)

$$\log(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

Quindi:

$$\left[\log(1+x^3)\right]^2 = \left[x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right]^2 =$$

(utilizziamo la formula del quadrato di un trinomio)

$$= x^6 + \frac{x^{12}}{4} + o(x^{12}) - x^9 + 2x^3 o(x^6) - x^6 o(x^6)$$

Osserviamo che i termini $\frac{x^{12}}{4}$, $o(x^{12})$, x^9, $2x^3 o(x^6)$, $x^6 o(x^6)$ sono tutti $o(x^6)$. Quindi anche la loro somma é un $o(x^6)$. In definitiva:

$$\left[\log(1+x^3)\right]^2 = x^6 + o(x^6)$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma seguente:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x^2}{x^6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^6}{6} + o(x^6)}{x^6 + o(x^6)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^6}{6}}{x^6} = -\frac{1}{6}$$

Fila 2 Determinare, mediante la formula di Taylor, il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\left(\sin x^2\right)^2} .$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite proposto.

$$\sin y = y + o(y)$$

posto $y = x^2$ (per $x \to 0$, $y \to 0$)

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$$

Da cui sviluppando mediante la formula del quadrato di un binomio:

$$\left(\sin x^2\right)^2 = \left[x^2 + o(x^2)\right]^2 = x^4 + 2x^2 o(x^2) + o(x^4)$$

.

Il termine $2x^2 o(x^2)$ é un $o(x^4)$, tenuto conto che $o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$, otteniamo:

$$\left(\sin x^2\right)^2 = x^4 + o(x^4)$$

Mentre

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

posto $y = x^2$ (per $x \to 0$, $y \to 0$)

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma seguente:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - x^2}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^4} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Fila 3 Determinare, mediante la formula di Taylor, il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\log(1+x^2)\right]^2}{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}.$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite proposto.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Mentre

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

posto $y = x^2$ (per $x \to 0$, $y \to 0$)

$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$

Quindi:

$$\left[\log(1+x^2)\right]^2 = \left[x^2 + o(x^2)\right]^2 =$$

(utilizziamo la formula del quadrato di un binomio)

$$= x^4 + 2x^2 o(x^2) + o(x^4)$$

Osserviamo che il termine $2x^2 o(x^2)$ é un $o(x^4)$. Tenuto conto che $o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$, otteniamo in definitiva:

$$\left[\log(1+x^2)\right]^2 = x^4 + o(x^4)$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma seguente:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 + o(x^4)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^2}{2}} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{-\frac{x^4}{24}} \;=\; -24$$

Fila 4 Determinare, mediante la formula di Taylor, il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - x}{[\log(1+x)]^2 - x^2}.$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite proposto.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Mentre

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi:

$$[\log(1+x)]^2 = \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]^2 =$$

(utilizziamo la formula del quadrato di un trinomio)

$$= x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x^3 + 2xo(x^2) - x^2o(x^2)$$

Osserviamo che i termini $\frac{x^4}{4}$, $o(x^4)$, $2xo(x^2)$, $x^2o(x^2)$ sono tutti $o(x^3)$. Quindi anche la loro somma é un $o(x^3)$. In definitiva:

$$[\log(1+x)]^2 = x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma seguente:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^2 - x^3 + o(x^3) - x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{-x^3} = \frac{1}{6}$$