Prova scritta del 6/2/2003

Soluzione degli esercizi N.3

Fila n.1 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{2x+1}\,dx$$

Risolviamo effettuando un cambiamento di variabile: $t = \sqrt{x+1}$, quindi $x = t^2 - 1$ e $dx = 2t\;dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{t}{2(t^2-1)+1}\,2t\,dt \;=\; \int \frac{2t^2}{2t^2-1}\,dt \;=\; \int \frac{2t^2-1+1}{2t^2-1}\,dt =$$

$$= \int 1 + \frac{1}{2t^2-1}\,dt \;=\; \int 1\,dt \;+\; \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\,dt$$

Utilizziamo il metodo di risoluzione degli integrali di funzioni razionali calcolando le costanti reali A,B tali che:

$$\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\,dt \;=\; \int \frac{A}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{B}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dt \tag{1}$$

Sviluppiamo la frazione al secondo membro dell'eguaglianza sopra:

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{A\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+B\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Deve risultare, infine:

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{(A+B)t+\left(\frac{A}{\sqrt{2}}-\frac{B}{\sqrt{2}}\right)}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{2}$$

L'eguaglianza (2) è valida, per ogni $t \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, se sono uguali i polinomi posti al numeratore di ciascuna frazione:

$$1=(A+B)t+\left(\frac{A}{\sqrt{2}}-\frac{B}{\sqrt{2}}\right) \tag{3}$$

(3)è un'eguaglianza tra polinomi, risulta verificata$\forall t \in \mathbb{R}$ se sono uguali i coefficienti dei termini di uguale grado. Imponiamo questa condizione in (3) e otteniamo il sistema lineare di primo grado in due equazioni e due incognite A,B:

$$\begin{cases} A+B= & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{2}}-\frac{B}{\sqrt{2}}= & 1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema ottenendo come soluzione: $A=\frac{\sqrt{2}}{2}, B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A questo punto sostituiamo i valori calcolati di A, B in (1):

$$\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\,dt=\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dt= \tag{4}$$

$$\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dt-\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C.$$

L'insieme delle primitive dell'integrale assegnato è:

$$\left\{t+\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\frac{\sqrt{2(x+1)}-1}{\sqrt{2(x+1)}+1}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Fila n.2 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{3x+2}\,dx$$

Risolviamo effettuando un cambiamento di variabile: $t = \sqrt{x-1}$, quindi $x = t^2 + 1$ e $dx = 2t\ dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{t}{3(t^2+1)+2}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{3t^2+5}\,dt.$$

Ci siamo ricondotti alla risoluzione dell'integrale di una funzione razionale. In questo caso la scomposizione dl numeratore della frazione integranda è meno ovvia di quella dell'esercizio precedente, anche se altrettanto semplice. Se non si intuisce, si può procedere utilizzando l'algoritmo della divisione tra polinomi e si ottiene la seguente scomposizione del numeratore:

$$2t^2 = \frac{2}{3}(3t^2+5) - \frac{10}{3}$$

Sostituendo nell'integrale:

$$= \int \frac{\frac{2}{3}(3t^2+5) - \frac{10}{3}}{3t^2+5}\,dt = \int \frac{2}{3} - \frac{10}{3}\frac{1}{3t^2+5}\,dt = \int \frac{2}{3}\,dt - \frac{10}{3}\int \frac{1}{3t^2+5}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right)^2+1}\sqrt{\frac{3}{5}}\,dt \tag{5}$$

Ci siamo ricondotti ad un integrale quasi immediato . Infatti ponendo $s = \sqrt{\frac{3}{5}}t$, per cui $ds = \sqrt{\frac{3}{5}}dt$, in(5) si ottiene:

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right)^2+1}\sqrt{\frac{3}{5}}\,dt = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \arctan s + C = \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right) + C$$

L'insieme delle primitive dell'integrale assegnato è dunque:

$$\left\{\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\arctan\sqrt{\frac{3}{5}\ }\ t + C\right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{x-1}\right) + C \right\}.$$

Fila n.3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{3x+1}\,dx.$$

Risolviamo, anche in questo caso, mediante un cambiamento di variabile: $t = \sqrt{x-2}$, quindi $x = t^2 + 2$ e $dx = 2t\ dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{t}{3(t^2+2)+1}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{3t^2+7}\,dt$$

Procedendo come negli esercizi precedenti, scomponiamo il numeratore della frazione integranda:

$$2t^2 = \frac{2}{3}(3t^2+7) - \frac{14}{3}$$

Sostituendo questa espresione nell'integrale:

$$= \int \frac{2}{3} - \frac{14}{3}\frac{1}{3t^2+7}\,dt = \int \frac{2}{3}\,dt - \frac{14}{3}\int \frac{1}{3t^2+7}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t - \frac{14}{3}\int \frac{1}{7}\frac{1}{\left(\frac{3}{7}t^2+1\right)}\,dt = \frac{2}{3}t - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,t\right)^2+1}\sqrt{\frac{3}{7}}\,dt$$

Quest'ultimo è un integrale della stessa forma di quello dell'esercizio della Fila n. 2, lo risolviamo ponendo: $s = \sqrt{\frac{3}{7}}\,t$, da cui $ds = \sqrt{\frac{3}{7}}\,dt$:

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,t\right)^2+1}\frac{\sqrt{3}}{7}\,dt = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \arctan s + C = \arctan\sqrt{\frac{3}{7}}\,t + C.$$

L'insieme delle primitive dell'integrale dato è :

$$\left\{ \frac{2}{3}\,t - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\ \arctan\sqrt{\frac{3}{7}}\,t + C \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{x-2} - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\ \arctan\sqrt{\frac{3}{7}\ (x-2)} + C \right\}.$$

Fila n.4 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{4x+1}\ dt.$$

Risolviamo effettuando un cambiamento di variabile analogo a quello degli esercizi precedenti: $t = \sqrt{x+2}$, quindi $x = t^2 - 2$ e $dx = 2t\ dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{t}{4(t^2-2)+1}\ 2t\,dt\ = \int \frac{2t^2}{4t^2-7}\ dt\,.$$

Si tratta quindi, anche in questo caso dell'integrale di una funzione razionale, scomponiamo il numeratore della frazione integranda:

$$2t^2 = \frac{1}{2}(4t^2-7) + \frac{7}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\frac{1}{4t^2-7}\ dt\ = \int \frac{1}{2}\,dt\ +\ \frac{7}{8}\int \frac{1}{t^2-\frac{7}{4}}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,t + \frac{7}{8}\int \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\ dt$$

Siamo nella stesa situazione dell'esercizio della Fila n.1. Si tratta quindi di determinare A,B tali che:

$$\int \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\ dt\ = \int \frac{A}{t-\frac{\sqrt{7}}{2}} + \frac{B}{t+\frac{\sqrt{7}}{2}}\ dt \tag{6}$$

Sviluppiamo la frazione al secondo membro dell'eguaglianza (6):

$$\frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{A\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right) + B\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{(A+B)t + (A-B)\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

Questa eguaglianza è valida, per ogni $t \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\}$, se le due frazioni hanno uguali i polinomi posti al numeratore, cioè:

$$1 = (A+B)t + (A-B)\frac{\sqrt{7}}{2}, \tag{7}$$

Abbiamo ottenuto un'eguaglianza tra polinomi, che è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$, se sono uguali i coefficienti dei termini di egual grado. Questa condizione ci porta a risolvere il sistema lineare di primo grado nelle incognite A,B:

$$\begin{cases} A+B = & 0 \\ A\frac{\sqrt{7}}{2} - B\frac{\sqrt{7}}{2} = & 1 \end{cases}$$

Otteniamo come soluzione: $A = \frac{1}{\sqrt{7}}, B = -\frac{1}{\sqrt{7}}$. Sostituiamo questi valori in (6):

$$\int \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\,dt = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{t-\frac{\sqrt{7}}{2}}\,dt - \int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{t+\frac{\sqrt{7}}{2}}\,dt = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\log\left|t-\frac{\sqrt{7}}{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{7}}\log\left|t+\frac{\sqrt{7}}{2}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{7}}\log\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right| + C.$$

L'insieme delle primitive dell'integrale assegnato è:

$$\left\{\frac{1}{2}t + \frac{7}{8\sqrt{7}}\log\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$\left\{\frac{1}{2}\sqrt{x+2} + \frac{7}{8\sqrt{7}}\log\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{7}}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$