Svolgimento degli esercizi N. 3

Prova scritta parziale n. 2 del 20/12/2002

Fila 1. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \left(x + e^{2x}\right)^2 \, dx.$$

Iniziamo sviluppando il quadrato ed utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale:

$$\int_0^1 \left(x + e^{2x}\right)^2 \, dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 + e^{4x} + 2x\, e^{2x}\right) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 e^{4x} \, dx + \int_0^1 2x\, e^{2x} \, dx. \tag{1}$$

Calcoliamo, nella somma di integrali così ottenuta, il primo termine. A tale scopo utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, considerando il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Consideriamo ora il secondo termine della somma (1). Calcoliamo l'integrale indefinito mediante il cambiamento di variabile: $t = 4x$, quindi $dt = 4dx$ perciò $dx = \frac{1}{4}dt$

$$\int e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} \int e^t \, dt = \frac{1}{4}e^t + C = \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

Calcoliamo il relativo integrale definito mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 e^{4x}\,dx = \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}$$

Il terzo termine della somma (1) si risolve prima mediante cambiamento di variabile e poi mediante integrazione per parti:
$t = 2x$, quindi $dt = 2dx$ perciò $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int 2x\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt \tag{2}$$

Applichiamo, a questo punto, la formula di integrazione per parti:
$\int F(t)\,G'(t)\,dt = F(t)G(t) - \int F'(t)G(t)\,dt$, prendendo $F(t) = t, G(t) = e^t$, quindi $F'(t) = 1, G(t) = e^t$, sostituiamo in (2):

$$\frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt = \frac{te^t}{2} - \frac{1}{2}\int e^t\,dt =$$
$$= \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{2} + C = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 2xe^{2x}\,dx = \left[xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

In definitiva il valore dell'integrale proposto è: $\frac{7}{12} + \frac{1}{4}e^4 + \frac{e^2}{2}$

Fila 2. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (x + \sin 2x)^2\ dx.$$

Iniziamo sviluppando il quadrato ed utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale:

$$\int_0^1 (x + \sin 2x)^2\ dx =$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 + 2x\sin 2x + (\sin 2x)^2\right]\,dx =$$
$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 2x\sin 2x\,dx + \int_0^1 (\sin 2x)^2\,dx. \tag{3}$$

Calcoliamo, nella somma di integrali così ottenuta, il primo termine. A tale scopo utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, considerando il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Consideriamo ora il terzo termine della somma (3). Calcoliamo l'integrale indefinito mediante il cambiamento di variabile: $t = 4x$, quindi $dt = 4dx$ perciò $dx = \frac{1}{4}dt$

$$\int (\sin 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\sin\frac{t}{2}\right)^2 dt =$$

(per la formula di bisezione del seno)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos t}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}\sin t + C = \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

Calcoliamo il relativo integrale definito mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 (\sin 2x)^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sin 4$$

Il secondo termine della somma (3) si risolve prima mediante cambiamento di variabile e poi mediante integrazione per parti.
$t = 2x$, quindi $dt = 2dx$ perciò $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int 2x\,\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int t\,\sin t\,dt \tag{4}$$

Applichiamo, a questo punto, la formula di integrazione per parti:
$\int F(t)\,G'(t)\,dt = F(t)G(t) - \int F'(t)G(t)\,dt$, prendendo $F(t) = t, G'(t) = \sin t$, quindi $F'(t) = 1, G(t) = -\cos t$, sostituiamo in (4):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int t\,\sin t\,dt &= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \\
= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{\sin t}{2} + C &= -x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} + C
\end{aligned}$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^1 2x \sin 2x \, dx = \left[-x \cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^1 = -\cos 2 + \frac{\sin 2}{2}$$

In definitiva il valore dell'integrale proposto è: $\frac{5}{6} - \frac{\sin 4}{8} + \frac{\sin 2}{2} - \cos 2$

Fila 3. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (x + \cos 2x)^2 \quad dx.$$

Iniziamo sviluppando il quadrato ed utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x + \cos 2x)^2 \quad dx &= \\ = \int_0^1 \left[x^2 \ + \ 2x \ \cos x + (\cos 2x)^2 \right] \ dx &= \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 2x \ \cos 2x \, dx + \int_0^1 (\cos 2x)^2 \ dx. \tag{5}$$

Calcoliamo, nella somma di integrali così ottenuta, il primo termine. A tale scopo utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, considerando il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \, dx \ = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2 \, dx \ = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Consideriamo ora il terzo termine della somma (5). Calcoliamo l'integrale indefinito mediante il cambiamento di variabile: $t = 4x$, quindi $dt = 4dx$ perciò $dx = \frac{1}{4}dt$

$$\int (\cos 2x)^2 \ dx \ = \frac{1}{4} \int \left(\cos \frac{t}{2} \right)^2 \ dt \ =$$

(per la formula di bisezione del coseno)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos t}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}\sin t + C = \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il relativo integrale definito mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$
\int_0^1 (\cos 2x)^2\;dx\;=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sin 4
$$

Il secondo termine della somma (5) si risolve prima mediante cambiamento di variabile e poi mediante integrazione per parti : $t = 2x$, quindi $dt = 2dx$ perciò $dx = \frac{1}{2}dt$

$$
\int 2x\,\cos 2x\,dx\;=\;\frac{1}{2}\int t\,\cos t\,dt \tag{6}
$$

Applichiamo, a questo punto, la formula di integrazione per parti:
$\int F(t)\,G'(t)\,dt\;=\;F(t)G(t)-\int F'(t)G(t)\,dt$, prendendo $F(t)\;=\;t, G'(t)\;=\;\cos t$, quindi $F'(t)=1, G(t)=\sin t$, sostituiamo in (6):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int t\,\cos t\,dt \quad &= \quad \frac{t}{2}\sin t-\frac{1}{2}\int \sin t\,dt\;= \\
=\frac{t}{2}\sin t+\frac{\cos t}{2}+C \quad &= \quad x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}+C
\end{aligned}
$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$
\int_0^1 2x\cos 2x\,dx=\left[x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^1=\sin 2+\frac{\cos 2}{2}-\frac{1}{2}
$$

In definitiva il valore dell'integrale proposto è: $\frac{1}{3}+\frac{\sin 4}{8}+\frac{\cos 2}{2}+\sin 2$
Fila 4. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$
\int_{\frac{1}{2}}^1 (x+\log 2x)^2\;\;dx.
$$

Iniziamo sviluppando il quadrato ed utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x + \log 2x)^2 \ dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x^2 + 2x \log 2x + (\log 2x)^2\right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \log 2x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\log 2x)^2 \ dx. \tag{7}$$

Calcoliamo, nella somma di integrali così ottenuta, il primo termine. A tale scopo utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, considerando il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Quindi

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{7}{24}$$

Il secondo termine della somma (7) si risolve prima mediante cambiamento di variabile e poi mediante integrazione per parti.

$t = 2x$, quindi $dt = 2dx$ perciò $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int 2x \log 2x \, dx = \frac{1}{2} \int t \log t \, dt \tag{8}$$

Applichiamo, a questo punto, la formula di integrazione per parti:

$\int F'(t)\, G(t)\, dt = F(t)G(t) - \int F(t)G'(t)\, dt$, prendendo $F'(t) = t, G(t) = \log t$, quindi $F(t) = \frac{t^2}{2}, G'(t) = \frac{1}{t}$, sostituiamo in (8):

$$\frac{1}{2} \int t \log t \, dt = \frac{t^2}{4} \log t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} \, dt =$$

$$= \frac{t^2}{4} \log t - \frac{1}{4} \int t \, dt =$$

$$= \frac{t^2}{4} \log t - \frac{1}{8} t^2 + C = x^2 \log 2x - \frac{x^2}{2} + C$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \log 2x \, dx &= \\ = \left[x^2 \log 2x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} &= \\ = \log 2 - \frac{3}{8} &. \end{aligned}$$

Consideriamo infine il terzo termine della somma (7) procedendo nello stesso modo visto sopra nel caso del secondo termine: prima il cambiamento di variabile($t = 2x$, quindi $dt = 2dx$ perciò $dx = \frac{1}{2}dt$) e poi integrazione per parti.

$$\int (\log 2x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int (\log t)^2 \, dt \tag{9}$$

In questo caso applichiamo la formula di integrazione per parti $\int F'(t)\, G(t)\, dt = F(t)G(t) - \int F(t)G'(t)\, dt$, prendendo $F'(t) = 1, G(t) = (\log t)^2$, quindi $F(t) = t, G'(t) = 2\frac{\log t}{t}$, sostituendo in (9) si ottiene:

$$\frac{1}{2} \int (\log t)^2 \, dt = \frac{1}{2} t (\log t)^2 - \frac{1}{2} \int \log t \, dt$$

integriamo di nuovo per parti l'ultimo termine prendendo: $F'(t) = 1, G(t) = \log t$, da cui $F(t) = t, G'(t) = \frac{1}{t}$, otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int (\log t)^2 \, dt &= \\ = \frac{1}{2} t (\log t)^2 - \frac{1}{2} \left(t \log t - \int 1 \, dt \right) &= \\ = \frac{1}{2} t (\log t)^2 - \frac{1}{2} t \log t + \frac{t}{2} + C &= \\ = x (\log 2x)^2 - x \log 2x + x + C & \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\log 2x)^2 \, dx = \left[x (\log 2x)^2 - x \log 2x + x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = (\log 2)^2 - \log 2 + \frac{1}{2}$$

In definitiva il valore dell'integrale proposto è: $\frac{5}{12} + (\log 2)^2$