Prova parziale scritta del 19/12/2003

Risoluzione degli esercizi sugli integrali

FILA 1

$$\int \frac{1}{e^x - 1}\ dx$$

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabili: $e^x = t$, ossia $x = \log t$, quindi $dx = \frac{1}{t}dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{1}{t-1}\frac{1}{t}\ dt$$

La funzione integranda è una funzione razionale, per risolvere l'integrale dobbiamo determinare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{t-1}\quad\frac{1}{t} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t} = \frac{At + Bt - B}{(t-1)t}$$

Da cui deduciamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $A = 1,\ B = -1$. Sostituendo nell'integrale sopra:

$$\int \frac{1}{t-1}\quad\frac{1}{t}\ dt = \int \frac{1}{t-1}\ dt + \int \frac{-1}{t}\ dt\ =\ \log|t-1| - \log|t| + C$$

Tenuto conto della posizione fatta all'inizio otteniamo in definitiva:

$$\int \frac{1}{e^x - 1}\ dx\ =\ \log\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C.$$

FILA 2

$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x+2}}\ dx$$

Cambiamo variabile nell'integrale ponendo $t = \sqrt{x+2}$, quindi $x = t^2 - 2$ e $dx = 2tdt$. Da questo otteniamo:

$$\int \frac{2t}{t^2 - t - 2}\ dt\ =\ \int \frac{2t-1}{t^2 - t - 2}\ dt\ +\ \int \frac{1}{t^2 - t - 2}\ dt\ =$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo sommato e sottratto il termine $\frac{1}{t^2 - t - 2}$)

$$=\ \log|t^2 - t - 2|\ +\ \int \frac{1}{t^2 - t - 2}\ dt$$

Per calcolare l'ultimo integrale applichiamo il metodo di integrazione delle funzioni razionali calcolando le radici del denominatore, $t^2 - t - 2 = 0$, $t_{1,2} = -1, 2$, e determinando poi $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{t^2 - t - 2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A - 2B}{(t-2)(t+1)}$$

Da cui ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases}$$

La soluzione è: $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3}$, che sostituita nell'integrale:

$$\int \frac{1}{t^2-t-2}\,dt = \int \frac{1}{3}\frac{1}{t-2}\,dt + \int -\frac{1}{3}\frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{3}\log|t-2| - \frac{1}{3}\log|t+1| + C.$$

Tenuto conto delle posizioni sopra fatte si ha in definitiva:

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dt = \log|x-\sqrt{x+2}| + \frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+1}\right| + C.$$

FILA 3

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-x)(x+2)}\,dx$$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, quindi $x = t^2$ e $dx = 2t\ dt$. Sostituendo si ottiene:

$$\int \frac{t+1}{(t-t^2)(t^2+2)}\,2t\ dt = 2\int \frac{t+1}{(1-t)(t^2+2)}\,dt$$

Applichiamo il metodo di integrazione di funzioni razionali, caso con denominatore di grado superiore a due (vedi Marcellini - Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno" pag. 229, es 71.21) determinando $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{t+1}{(1-t)(t^2+2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+2}$$

ossia

$$\frac{t+1}{(1-t)(t^2+2)} = \frac{(A-B)t^2+(B-C)t+2A+C}{(1-t)(t^2+2)}$$

Otteniamo i valori cercati di A, B, C risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ B-C=1 \\ 2A+C=1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è: $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$. Sostituendo nell'integrale:

$$\int \frac{t+1}{(1-t)(t^2+2)}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}}{t^2+2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{1}{3}\int \frac{2t-1}{t^2+2}\,dt = \frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{1}{3}\int \frac{2t}{t^2+2}\,dt - \frac{1}{6}\int \frac{1}{\frac{t^2}{2}+1}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{1}{3}\log(t^2+2) - \frac{1}{6}\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}}) + C$$

Sostituiamo nell'integrale di partenza tenendo conto della posizione fatta:

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-x)(x+2)}\,dx = \frac{2}{3}\log|1-\sqrt{x}| + \frac{1}{3}\log|x+2| + \frac{1}{6}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

FILA 4

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabili: $e^x = t$, ossia $x = \log t$, quindi $dx = \frac{1}{t}dt$. L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{t}{t^2-4}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2-4}\,dt$$

La funzione integranda è una funzione razionale, per risolvere l'integrale dobbiamo determinare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{t-2} \quad \frac{1}{t+2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{At + Bt + 2A - 2B}{(t-2)(t+2)}$$

Da cui deduciamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}$. Sostituendo nell'integrale sopra:

$$\int \frac{1}{t^2-4}\, dt = \int \frac{1}{4(t-2)}\, dt + \int \frac{-1}{4(t+2)}\, dt = \frac{1}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t+2| + C = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C$$

Tenuto conto della posizione fatta all'inizio otteniamo in definitiva:

$$\int \frac{1}{e^x-1}\, dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x-2}{e^x+2}\right| + C.$$