Prova scritta del 9/1/2003

Svolgimento dell'esercizio N.2 - Fila N.1

Fila 1 Studiare il comportamento e tracciare un grafico approssimato della funzione:

$$f(x) = -x + 1 + \log\left(1 + \frac{5}{\mid x \mid}\right).$$

La funzione ha come dominio tutti i valori di x che rendono positivo l'argomento del logaritmo e che non annullano il denominatore della frazione che compare nell'espressione:

$$1 + \frac{5}{\mid x \mid} > 0 \tag{1}$$

e $x \neq 0$, ma la disequazione (1) è sempre verificata perchè è costituita da somma e rapporto di quantità positive ($\mid x \mid > 0$).

Quindi $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. Il comportamento della funzione agli estremi del dominio /'e individuato dai seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 0\pm} \quad f(x) = +\infty, \tag{2}$$

perchè

$$\lim_{x \to 0\pm} \quad \left(1 + \frac{5}{\mid x \mid}\right) = +\infty, \tag{3}$$

in quanto:

$$\lim_{y \to +\infty} \quad \log y = +\infty, \tag{4}$$

Inoltre $\lim_{x \to \pm\infty} \quad f(x) = \mp\infty$, determiniamo quindi eventuali asintoti:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \tag{5}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x + 1 + \log\left(1 + \frac{5}{|x|}\right)}{x} = \tag{6}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{5}{\mid x\mid}\right) = -1 \qquad (7)$$

perchè : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{5}{|x|}\right) = 0$,
essendo $\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(1+\frac{5}{|x|}\right) = \log 1 = 0$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \qquad (8)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -x + 1 + \log\left(1+\frac{5}{\mid x\mid}\right) + x = 1 \qquad (9)$$

La funzione ha quindi come asintoto per $x \to +\infty$ (ed anche per $x \to -\infty$) la retta di equazione $y = -x + 1$.

Determiniamo gli eventuali massimi o minimi relativi e gli intervalli di monotonia della funzione calcolando gli zeri e il segno della derivata prima. Prima di calcolare $f'(x)$, osserviamo che nell'espressione di $f(x)$ compare un valore assoluto. Per semplificare i calcoli è utile esplicitarlo :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 + \log\left(1+\frac{5}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ -x + 1 + \log\left(1-\frac{5}{x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Calcoliamo partendo da questa espressione di f la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \frac{5}{x(x+5)} = \frac{-x^2-5x-5}{x(x+5)} & \text{se } x > 0 \\ -1 + \frac{5}{x(x-5)} = \frac{-x^2+5x+5}{x(x-5)} & \text{se } x < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Determiniamo gli zeri della derivata prima. A tale scopo distinguiamo i due casi :

1) se $x > 0$ l'equazione da risolvere è $-x^2 - 5x - 5 = 0$
2) se $x < 0$ l'equazione da risolvere è $-x^2 + 5x + 5 = 0$

Le radici della prima equazione sono $x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ che sono entrambi negative, quindi f' non ha radici per $x > 0$.

La seconda equazione ha radici $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{45}}{2}$. La derivata prima si annulla per $x < 0$ nel punto $x_1 = \frac{5-\sqrt{45}}{2}$ (l'altra radice viene scartata perchè è positiva).

Per studiare il segno di f' risolviamo i sistemi:

$$\begin{cases} \frac{-x^2-5x-5}{x(x+5)} > 0 \\ x > 0. \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{-x^2+5x+5}{x(x-5)} > 0 \\ x < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Cosideriamo il sistema (12). Le soluzioni saranno date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} -x^2 - 5x - 5 > 0 \\ x(x+5) > 0 \\ x > 0. \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 5x - 5 < 0 \\ x(x+5) < 0 \\ x > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Mentre le soluzioni del sistema (13) sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} -x^2 + 5x + 5 > 0 \\ x(x-5) > 0 \\ x < 0. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 5x + 5 < 0 \\ x(x-5) < 0 \\ x < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Cosideriamo il sistema (14): non ammette soluzioni perchè la prima equazione è positiva solo nelle intervallo $(\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2})$ che è interamente contenuto nella semiretta $x < 0$. Consideriamo il sistema (15) : ha soluzione $x > 0$.

Possiamo quindi affermare che per $x > 0$ si ha $f'(x) < 0$. Questo implica che f risulta decrescente sulla semiretta $x > 0$.

Mentre il sistema (16) ha soluzioni : $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 0$. Il sistema (17) ha soluzioni $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Per cui $f'(x) > 0$ per $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $f'(x) < 0$ per $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. La funzione data sarà pertanto : crescente per $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, decrescente per $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Da queste considerazioni deduciamo che il punto $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (nel quale, come visto in precedenza, la derivata prima si annulla) è un punto di minimo relativo. Infatti per $x < x_1$ si ha che f decresce , mentre per $x_1 < x < 0$ la funzione risulta crescente.

Calcoliamo la derivata seconda di f.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{10x+25}{(x^2+5x)^2} \text{ se } x > 0 \\ \frac{-10x+25}{(x^2-5x)^2} \text{ se } x < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Lo studio del segno di f'' ci permette di individuare gli intervalli dove f è concava e dove è convessa.

Il segno di f'' è determinato dal segno del numeratore della frazione di ciascuna delle espressioni di (18), perchè il denominatore è un quadrato e quindi è sempre positivo. Si verifica facilmente che: $f''(x) > 0$ se $x > 0$ perchè $10x + 25 > 0$, $\forall x > -\frac{5}{2}$ perciò $10x + 25 > 0$, $\forall x > 0$. Analogamente:

$f''(x) > 0$ se $x < 0$ perchè $-10x + 25 > 0$, $\forall x < \frac{5}{2}$ perciò $-10x + 25 > 0$, $\forall x < 0$.

La funzione f risulta di conseguenza convessa per $x > 0$ e per $x < 0$.

Abbiamo gli tutti gli elementi per poter tracciare un grafico approssimato di f: