Prova scritta del 6/2/2003

Soluzione dell'esecizio n.2

Fila n.1

Data la funzione:

$$f(x) = \log \frac{x^2}{|x-9|}$$

studiarne l'andamento e tracciarne un grafico approssimato.

Iniziamo determinando il dominio. La funzione data è costituita dalla composizione tra la *funzione logaritmo* ed una *funzione razionale*. La *funzione logaritmo* è definita quando il suo argomento è positivo, nel nostro caso questa condizione è verificata per i valori di x per i quali la *funzione razionale* risulta positiva. Il numeratore di questa è un quadrato, quindi è positivo per ogni $x \neq 0$, mentre il denominatore non è mai negativo perchè si tratta di un *modulo*. La *funzione razionale* è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ che non renda nullo il denominatore della frazione, cioè per ogni $x \neq 9$. In definitiva:

$$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{0, 9\}.$$

Studiamo il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio mediante i seguenti limiti.
$\lim_{x \to 9\pm} f(x) = +\infty$, perchè per $x \to 9\pm$ si ha che $|x-9| \to 0+$, l'argomento del logaritmo assume la forma $\frac{81}{0+}$, quindi il suo limite è $+\infty$.

Mentre $\lim_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$, perchè per $x \to 0\pm$ si ha che $\frac{x^2}{|x-9|} \to 0+$, e $\lim_{t \to 0+} \log t = -\infty$.

Inoltre, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, perchè $\frac{x^2}{|x-9|} \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, e $\lim_{t \to +\infty} \log t = +\infty$.

Non esistono asintoti per $x \to \pm\infty$ perchè:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \log \frac{x^2}{|x-9|} = 0$$

Questo limite si può calcolare mediante il teorema dell'Hospital, oppure molto più semplicemente osservando che, per valori di x in valore assoluto sufficientemente grandi: [1]

$$\left|\frac{1}{x}\log\frac{x^2}{|x-9|}\right| \leq \frac{1}{|x|}\log x^2 = \frac{2}{|x|}\log|x| \;\to 0.$$

Determiniamo il segno della funzione:

$$\log\frac{x^2}{|x-9|} > 0 \quad \text{se} \quad \frac{x^2}{|x-9|} > 1, \text{ cioè } \quad x^2 > |x-9|.$$

Risolviamo quest'ultima disequazione riportandoci ai sistemi:

$$\begin{cases} x & > 9 \\ x^2 & > x-9 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x & < 9 \\ x^2 & > -x+9 \end{cases}$$

Le soluzioni sono date dai valori di x appartenenti a: $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{37}}{2}) \cup (9, +\infty)$, cioè in questo insieme la funzione è positiva, mentre $f(-\frac{1+\sqrt{37}}{2}) = 0$, e nei restanti valori la funzione è negativa.

Determiniamo ora gli intervalli di monotonia della funzione ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo calcolando la derivata prima di f. A tale scopo scriviamo la funzione nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \log\frac{x^2}{x-9} & \text{se } x > 9 \\ \\ \log\frac{x^2}{9-x} & \text{se } x < 9, \; x \neq 0. \end{cases}$$

Da cui:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-18}{x(x-9)} & \text{se } x > 9 \\ \\ \frac{18-x}{x(9-x)} & \text{se } x < 9, \; x \neq 0. \end{cases}$$

Il segno di f', per $x > 9$, è determinato dal segno di $x - 18$, in quanto il denominatore, nell'intervallo che stiamo considerando, è sempre positivo. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > 18$, $f'(x) < 0$ per $9 < x < 18$, in particolare $f'(18) = 0$.

[1] $\frac{1}{|x-9|} < 1$ equivale a $|x-9| > 1$, quindi $x > 10$ o $x < 8$.

Per $x < 9$ il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di x perchè in questo intervallo i termini $18 - x$ e $9 - x$ risultano positivi. Per cui $f'(x) < 0$ per $x < 0$ mentre $f'(x) > 0$ per $0 < x < 9$.

Da queste osservazioni possiamo dedurre che:
se $x > 18$, essendo $f'(x) > 0$, allora f è crescente,
se $9 < x < 18$, essendo $f'(x) < 0$, allora f è decrescente,
se $0 < x < 9$, essendo $f'(x) > 0$, allora f è crescente,
se $x < 0$, essendo $f'(x) < 0$, allora f è decrescente.

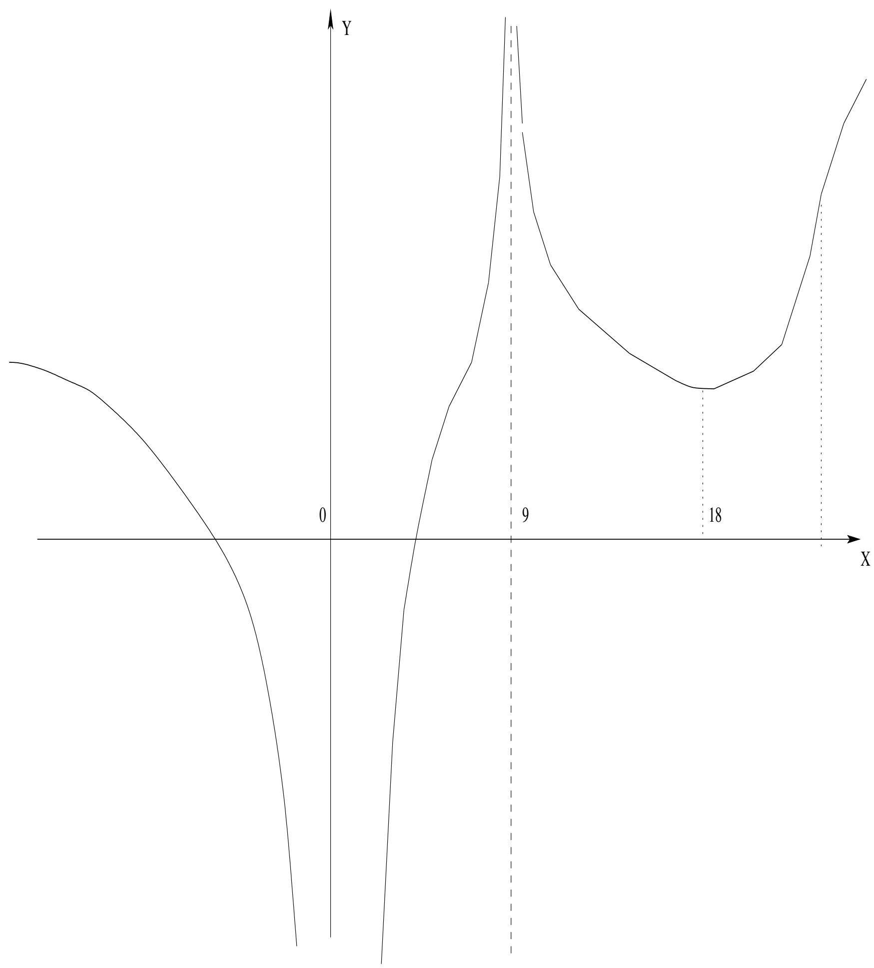
In particolare da quanto visto sopra si deduce che il punto $x = 18$ è punto di minimo relativo.

Determiniamo ora gli intervalli dove la funzione risulta concava, convessa, e gli eventuali flessi, studiando segno e zeri della derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+36x-162}{x^2(x-9)^2} & \text{se } x > 9 \\ \\ \frac{-x^2+36x-162}{x^2(9-x)^2} & \text{se } x < 9,\ x \neq 0. \end{cases}$$

Il segno di f" è determinato dal segno del numeratore che compare nella sua esepressione (il denominatore è sempre positivo trattandosi di un quadrato). Risolviamo l'equazione $-x^2 + 36x - 162 = 0$, otteniamo come radici: $x_{1,2} = 9(2 \pm \sqrt{2})$. Quindi, essendo il coefficiente di x^2 negativo, si ha:
se $x > 9(2 + \sqrt{2})$, allora $f''(x) < 0$, quindi f è concava,
se $9 < x < 9(2 + \sqrt{2})$, allora $f''(x) > 0$, quindi f è convessa,
se $9(2 - \sqrt{2}) < x < 9$, allora $f''(x) > 0$, quindi f è convessa,
se $x < 9(2 - \sqrt{2})$, allora $f''(x) < 0$, quindi f è concava.
In particolare, da quanto detto sopra, deduciamo che i punti $x_{1,2} = 9(2 \pm \sqrt{2})$ sono punti di flesso.

Mettendo insieme tutte le informazioni raccolte siamo in grado di tracciare il grafico della funzione.


Y
0
9
18
X