Svolgimento degli esercizi N.2

Prova scritta parziale n.2 del 20/12/2002

Fila 4 Data la funzione :

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{4x-3}+1\right),$$

studiarne l'andamento e tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

Iniziamo lo studio della funzione proposta determinandone il dominio. La funzione é definita per quei valori di $x \in \mathbf{R}$ per i quali risulta positivo l'argomento del logaritmo e che non annullino il denominatore della frazione che compare nell'espressione.

$$\begin{cases} \frac{1}{4x-3}+1>0 \\ 4x-3 \neq 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \frac{4x-2}{4x-3}>0 \\ 4x-3 \neq 0 \end{cases}$$

La soluzione si ottiene risolvendo:

$$\begin{cases} 4x-2>0 \\ 4x-3>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4x-2<0 \\ 4x-3<0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono date dalle x appartenenti alla semiretta $(-\infty, \frac{1}{2})$ o alla semiretta $(\frac{3}{4}, +\infty)$. Quindi:

$$\mathrm{Dom} f = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty).$$

Deduciamo dai seguenti limiti il comportamento della funzione nell'intorno degli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{1}{4x-3}+1\right) = 0$$

Perchè per $x \to \pm\infty$ il termine $\frac{1}{4x-3}$ tende a zero , quindi la funzione $\log\left(\frac{1}{4x-3}+1\right)$ tende a $\log(0+1) = \log 1 = 0$.

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}+} \log\left(\frac{1}{4x-3}+1\right) = \lim_{x\to\frac{3}{4}+} \log\left(\frac{1}{4(x-\frac{3}{4})}+1\right) =$$

(poniamo $y = 4\left(x-\frac{3}{4}\right)$, quindi per $x \to \frac{3}{4}^+$ risulta $y \to 0^+$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{1}{y}+1\right) &&= \quad (\text{posto } 1+\frac{1}{y} = t, \text{per} y \to 0^+, t \to +\infty) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \log t &&= \quad +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{1}{2}-} \log\left(\frac{1}{4x-3}+1\right) &= \lim_{x\to\frac{1}{2}-} \log\left(\frac{4x-2}{4x-3}\right) = \\ = \lim_{x\to\frac{1}{2}-} \log\left[\frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4x-3}\right] &= \end{aligned}$$

(poniamo $y = x - \frac{1}{2}$, quindi per $x \to \frac{1}{2}^-$ risulta $y \to 0^-$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{y\to 0-} \log\left(\frac{4y}{4y-1}\right) &&= \quad (\text{posto } \frac{4y}{4y-1} = t, \text{per} y \to 0^-, t \to 0^+) \\ &= \lim_{x\to 0+} \log t &&= \quad -\infty \end{aligned}$$

Per determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di massimo o minimo relativo calcoliamo f' . Le informazioni desiderate si avranno studiando il segno di f' e calcolando (se esistono) le soluzioni di $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = D(\log t)_{t=\frac{1}{4x-3}+1}\ D\left(\frac{1}{4x-3}+1\right) &= \\ = \frac{1}{\frac{1}{4x-3}+1}\ D\left(\frac{1}{t}\right)_{t=4x-3} &= \frac{1}{\frac{1}{4x-3}+1}\ \left(-\frac{1}{t^2}\right)_{t=4x-3} = \\ = \frac{1}{\frac{1}{4x-3}+1}\ \frac{-4}{(4x-3)^2} &= \frac{-4}{(4x-2)(4x-3)} \end{aligned}$$

(Nel calcolo di f' abbiamo usato la formula di derivazione di funzioni composte.)

Quindi

$$f'(x) = \frac{-4}{(4x-2)(4x-3)}. \tag{1}$$

Osserviamo che f' non si annulla mai. Il suo segno é determinato dal segno del denominatore, che é un polinomio di secondo grado che ha come radici $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{4}$. Il denominatore risulta quindi positivo per $x < \frac{1}{2}$ o $x > \frac{3}{4}$ (il coefficiente del termine di secondo grado é positivo). In definitiva, essendo negativo il numeratore della frazione di (1), risulta che

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{3}{4}$$

Non sarà verificato invece: $f'(x) > 0$, perchè la frazione di (1) risulta positiva nell'intervallo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ che non appartiene al dominio di f.

La funzione risulta pertanto decrescente sulla semiretta $(-\infty, \frac{1}{2})$ e sulla semiretta $(\frac{3}{4}, +\infty)$.

Calcoliamo la derivata seconda di f per determinare gli intervalli dove la funzione risulta concava o convessa.

$$\begin{aligned} f"(x) = D(f'(x)) &= D\left(\frac{-4}{(4x-2)\,(4x-3)}\right) = \\ = D\left(\frac{-4}{t}\right)_{t=(4x-2)(4x-3)} D[(4x-2)(4x-3)] &= \frac{4}{(4x-2)^(4x-3)^2}[4(4x-3)+4(4x-2)] = \\ &= \frac{16(8x-5)}{(4x-2)^2(4x-3)^2} \quad . \end{aligned}$$

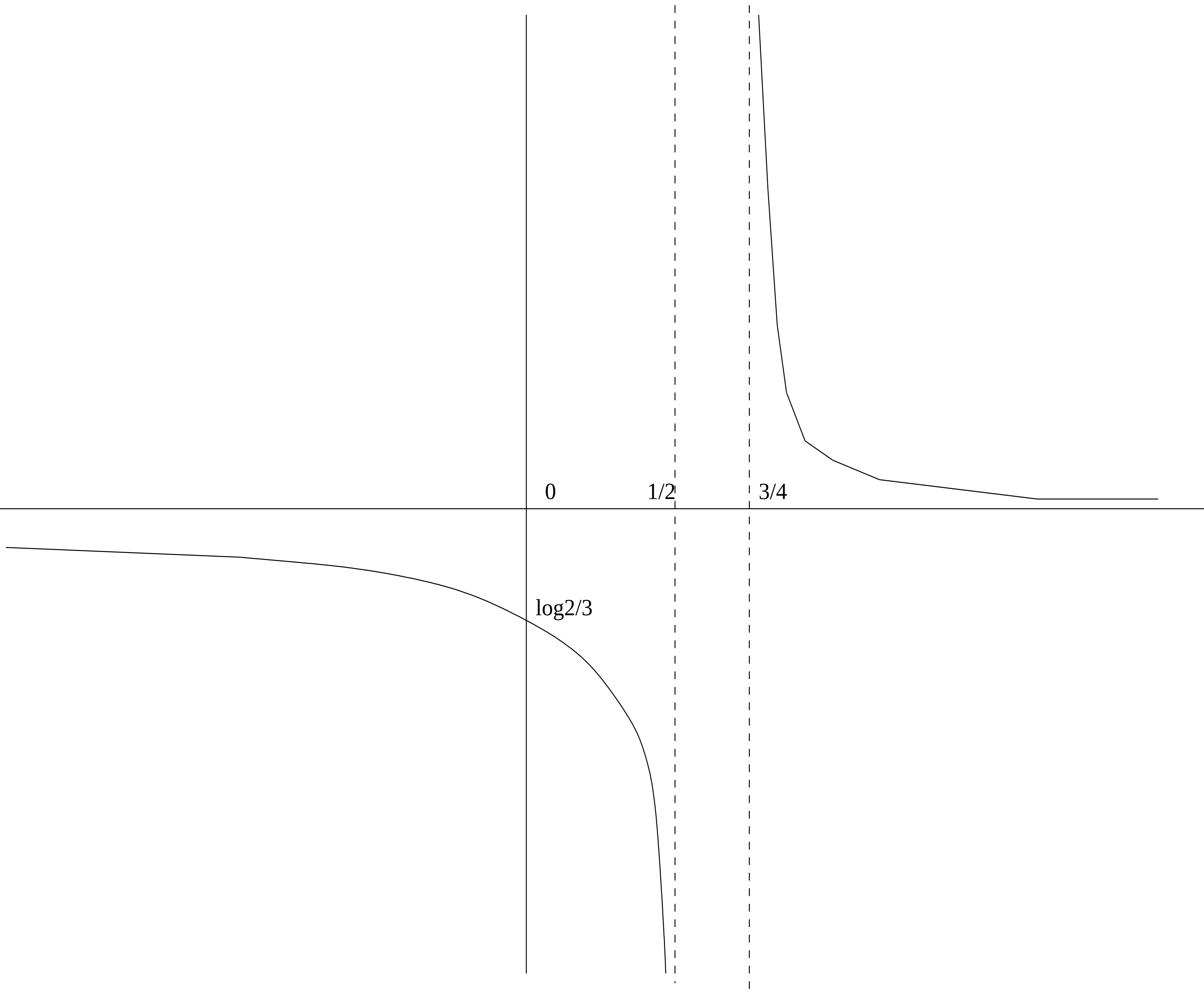
Da questo otteniamo che:

$$f"(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{5}{8}$$
$$f"(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{5}{8}$$

Osserviamo che $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$ cioè $\frac{5}{8} \notin Dom f$.
Possiamo allora concludere che :

$$f"(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{3}{4} \Longrightarrow f(x) \text{ convessa per } x > \frac{3}{4}$$
$$f"(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \text{ concava per } x < \frac{1}{2}.$$

Il grafico della funzione é quindi il seguente:


0
1/2
3/4
log2/3