Svolgimento degli esercizi N.1

Prova scritta del 9/1/2003

Fila N.1 Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^5}{(1-i)^7}$$

Per risolvere l'esercizio proposto applichiamo le formule per il calcolo della potenza e del rapporto tra numeri complessi. A tale scopo, dobbiamo esprimere i numeri complessi che compaiono nella formulazione dell'esercizio in forma trigonometrica. Per cui poniamo :

$$w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = 1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Quindi sostituendo nell'espressione data:

$$z = \frac{w^5}{v^7} = \frac{[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^5}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^7} =$$

(per la formula di de Moivre)

$$= \frac{\rho^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)}{r^7(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)} =^{1}$$

$$= \frac{\rho^5}{r^7}\left[\cos(5\varphi - 7\theta) + i\sin(5\varphi - 7\theta)\right] \tag{1}$$

A questo punto per completare l'esercizio si devono calcolare i moduli e gli argomenti di w e v.

$$|\, w \,| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

[1] il rapporto tra due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza tra gli argomenti.

$$| v |= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Per calcolare gli argomenti di w e v si devono risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = -1 \end{cases} \tag{3}$$

Risolviamo il primo sistema: Gli angoli $\varphi \in [0, 2\pi]$ che risolvono la prima equazione sono: $\varphi = \frac{5}{6}\phi$ oppure $\varphi = \frac{7}{6}\pi$, mentre la seconda equazione è risolta dai valori $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{5}{6}\pi$. Il sistema (2) ha quindi per soluzione :$\varphi = \frac{5}{6}\pi$.

Risolviamo il secondo sistema: Gli angoli $\theta \in [0, 2\pi]$ che risolvono la prima equazione sono: $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{7}{4}\pi$, mentre la seconda equazione è risolta dai valori $\theta = \frac{5}{4}\pi$ e $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Il sistema (2) ha quindi per soluzione :$\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Continuiamo lo svolgimento dell'esercizio sostituendo nell'espressione (1) i valori di $| w |$, $| v |$, θ, φ, sopra calcolati:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^7}\left[\cos\left(5\frac{5}{6}\pi - 7\frac{7}{4}\pi\right) + \sin\left(5\frac{5}{6}\pi - 7\frac{7}{4}\pi\right)\right] = \\ = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{25}{6}\pi - \frac{49}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{25}{6}\pi - \frac{49}{4}\pi\right)\right] = \\ = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{97}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{97}{12}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

Si tratta di determinare l'argomento principale di z cioè l'angolo $\xi \in [0, 2\pi)$ tale che :$z = \sigma(\cos\xi + i\sin\xi)$ dove $\sigma =| z |= \frac{1}{8\sqrt{2}}$. Per questo osserviamo che $-97\pi = -8\times12\pi - 1\pi = -8\times12\pi - 2\times12\pi + 2\times12\pi - 1 = -8\times12\pi - 2\times12\pi + 23\pi$ per cui

$$-\frac{97}{12}\pi = -5\times2\pi + \frac{23}{12}\pi$$

L'argomento principale di z è $\xi = \frac{23}{12}\pi$ mentre il modulo di z è $\sigma =| z |= \frac{1}{8\sqrt{2}}$.

Fila N.2 Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^6}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}$$

Procediamo come nell'esercizio precedente ponendo:

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = 1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Quindi sostituendo nell'espressione data:

$$z = \frac{w^6}{v^4} = \frac{[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^6}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^4} =$$

(per la formula di de Moivre)

$$= \frac{\rho^6(\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi)}{r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)} =^{2}$$

$$= \frac{\rho^6}{r^4}\left[\cos\left(6\varphi - 4\theta\right) + i\sin\left(6\varphi - 4\theta\right)\right] \tag{4}$$

Procedendo come nell'esercizio svolto sopra, calcoliamo il moduli e gli argomenti di w e v, in modo da poterli sostituire nella (4), ed otteniamo:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \tag{5}$$

$$v = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) \tag{6}$$

Sostituiamo in (4) :

$$z = \frac{1}{128}\left[\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right)\right]$$

Osserviamo che $-\frac{13}{6}\pi = -2\pi - \frac{1}{6}\pi == -2\pi - 2\pi + 2\pi - \frac{1}{6}\pi = -4\pi + \frac{11}{6}\pi$, quindi L'argomento principale di z è : $\xi = \frac{11}{6}\pi$, mentre il suo modulo è $\frac{1}{128}$.

Fila N.3 Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{(2-2i)^4}{\left(-3\sqrt{3} - 3i\right)^6}$$

Il procedimento è identico a quello degli esercizi già visti sopra .

$$w = -2 - i2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = -3\sqrt{3} - i3 = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

[2] il rapporto tra due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza tra gli argomenti.

$$w = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) \tag{7}$$

$$v = 6\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) \tag{8}$$

Applicando le formule viste sopra, in definitiva:

$$z = \frac{1}{3^6}\left[\cos(-2\pi) + i\sin 2\pi)\right] = \frac{1}{3^6}\left[\cos 0 + i\sin 0\right]$$

Per cui $\mid z \mid = \frac{1}{3^6}$ e l'argomento principale è $\xi = 0$.

Fila N.4 Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^4}$$

Anche questo esercizio viene risolto in maniera del tutto identica a quella degli esercizi precedenti.

$$w = \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$w = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) \tag{9}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) \tag{10}$$

Applicando le formule viste sopra otteniamo:

$$z = \frac{128}{243}\left[\cos(-\frac{16}{3}\pi) + i\sin(-\frac{16}{3}\pi)\right] = \frac{128}{243}\left[\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right]$$

Per cui $\mid z \mid = \frac{128}{243}$ e l'argomento principale è $\xi = \frac{2}{3}\pi$.