ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 7/6/2005 - FILA 1

Esercizio 1. (punti 9)

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 2y = \cos x$$

Esercizio 2. (punti 9)

Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) = e^{x^5 - 5x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Esercizio 3. (punti 8)

Calcolare

$$\int x \arctan(x-2)\, dx$$

Esercizio 4. (punti 7)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2} - \cos(\sqrt{2}\,x)}{(\sin x^2)\ \log(1+x^2)}$$

ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 7/6/2005 - FILA 2

Esercizio 1. (punti 9)

Risolvere l'equazione differenziale

$$2y'' + 2y' + 5\,y = \sin x$$

Esercizio 2. (punti 9)

Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) = e^{2x^5 - x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Esercizio 3. (punti 8)

Calcolare

$$\int x \arctan(x-3)\, dx$$

Esercizio 4. (punti 7)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)\ \sin x^4}{e^{\frac{x^4}{2}} - \cos x^2}$$

SOLUZIONI ESERCIZI DELLA FILA 1

Esercizio 1. (punti 9)

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 2\,y = \cos x$$

Svolgimento.
Determiniamo le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale:

$$\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

L'insieme delle soluzioni dell'*equazione omogenea* è

$$y_0(t) = C_1\, e^{-t} \cos\, t + C_2\, e^{-t} \sin t.$$

Determiniamo una soluzione particolare y_f dell'equazione non omogenea del tipo $y_f = A\cos x + B\sin x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate prime e seconde di y_f. Sostituendo nell'equazione data otteniamo

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = \cos x.$$

Ci siamo ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} -B - 2A &= 0 \\ A + 2B &= 1. \end{cases}$$

Da cui $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{5}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione proposta sono:

$$y(t) = C_1\, e^{-t} \cos\, t + C_2\, e^{-t} \sin t + \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}$$

Esercizio 2. (punti 9)

Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) = e^{x^5 - 5x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.
La funzione è definita su $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$f'(x) = e^{x^5-5x^2}\; 5\,x\,(x^3 - 2)$$

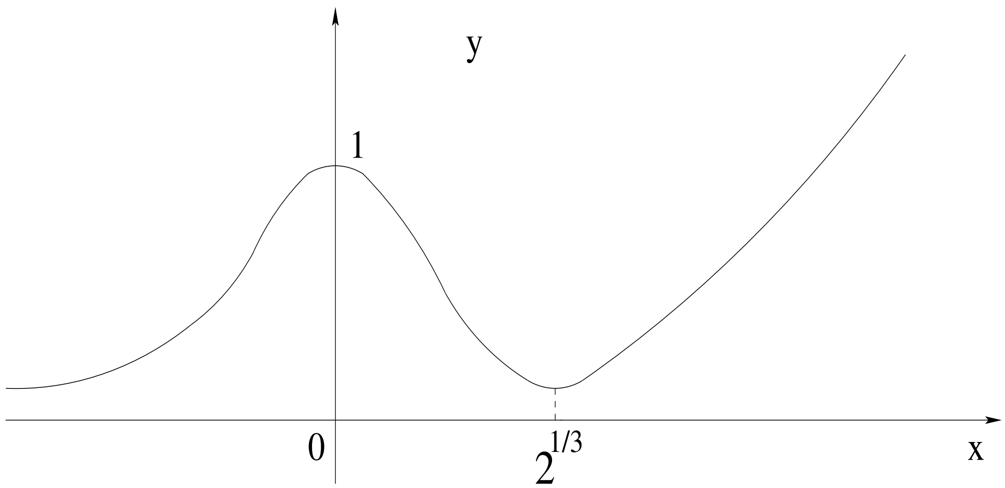
Gli zeri di f' sono 0 e $\sqrt[3]{2}$, da cui

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{per} & x > \sqrt[3]{2} \quad \text{oppure} \quad x < 0 \\ f'(x) < 0 & \text{per} & 0 < x < \sqrt[3]{2}, \end{array}$$

di conseguenza

$$
\begin{array}{ll}
f & \text{è crescente per} \quad x > \sqrt[3]{2} \quad \text{oppure} \quad x < 0 \\
f & \text{è decrescente per} \quad 0 < x < \sqrt[3]{2}.
\end{array}
$$

Da cui si deduce in particolare che $x_1 = \sqrt[3]{2}$ è un punto di *minimo relativo*, $x_2 = 0$ è un punto di *massimo relativo*. Il grafico di f è il seguente



Esercizio 3. (punti 8)

Calcolare

$$\int x \arctan(x-2)\,dx$$

Svolgimento.
Procediamo mediante l'*integrazione per parti*:

$$
\begin{aligned}
\int x \arctan(x-2)\,dx &= \frac{1}{2}\,x^2 \arctan(x-2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(x-2)^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\,x^2 \arctan(x-2) - \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{4x-5}{x^2-4x+5}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\,x^2 \arctan(x-2) - \frac{x}{2} - \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\,x^2 \arctan(x-2) - \frac{x}{2} - \log(x^2-4x+5) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\,x^2 \arctan(x-2) - \frac{x}{2} - \log(x^2-4x+5) - \frac{3}{2}\arctan(x-2) + C.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. (punti 7)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2} - \cos(\sqrt{2}\,x)}{(\sin x^2)\ \log(1+x^2)}$$

Svolgimento. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite

$$\begin{aligned}
&e^{x^2} \;=\; 1 + x^2 \;+\; \frac{1}{2}\,x^4 \;+\; o(x^4),\\
&\cos\,(\sqrt{2}\,x) \;=\; 1 \;-\; x^2 \;+\; \frac{1}{6}\,x^4 \;+\; o(x^4),\\
&\sin\,x^2 \;=\; x^2 \;+\; o(x^2)\\
&\log\,(1+x^2) \;=\; x^2 \;+\; o(x^2).
\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nel linite assegnato, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \;\frac{2\,x^2 \;+\; o(x^2)}{x^4 \;+\; o(x^4)} \;=+\infty.$$

SOLUZIONI ESERCIZI DELLA FILA 2

Esercizio 1. (punti 9)

Risolvere l'equazione differenziale

$$2y'' \;+\; 2y' \;+\; 5\,y = \;\sin x$$

Svolgimento.
Determiniamo le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale:

$$2\lambda^2 \;+\; 2\,\lambda \;+\; 5 \;=\; 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$

L'insieme delle soluzioni dell'*equazione omogenea* è

$$y_0(t) = C_1\,e^{-\frac{1}{2}t}\;\cos\,\frac{3}{2}t \;+\; C_2\,e^{-\frac{1}{2}t}\;\sin\,\frac{3}{2}t.$$

Determiniamo una soluzione particolare y_f dell'equazione non omogenea del tipo $y_f = A\cos x + B\sin x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate prime e seconde di y_f. Sostituendo nell'equazione data otteniamo

$$-2A\cos x - 2B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = \sin x.$$

Ci siamo ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3B - 2A &= \;1\\ 3A + 2B &= \;0. \end{cases}$$

Da cui $A = -\frac{2}{13}$, $B = \frac{3}{13}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione proposta sono:

$$y(t) = C_1\,e^{-\frac{1}{2}t}\;\cos\,\frac{3}{2}t \;+\; C_2\,e^{-\frac{1}{2}t}\;\sin\,\frac{3}{2}t + -\frac{2}{13}\;\cos x + \frac{3}{13}\sin x, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 2. (punti 9)

Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \;=\; e^{2x^5 - x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

La funzione è definita su $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$f'(x) \;=\; e^{2x^5-x^2} \;\; (10x^4 - 2x)$$

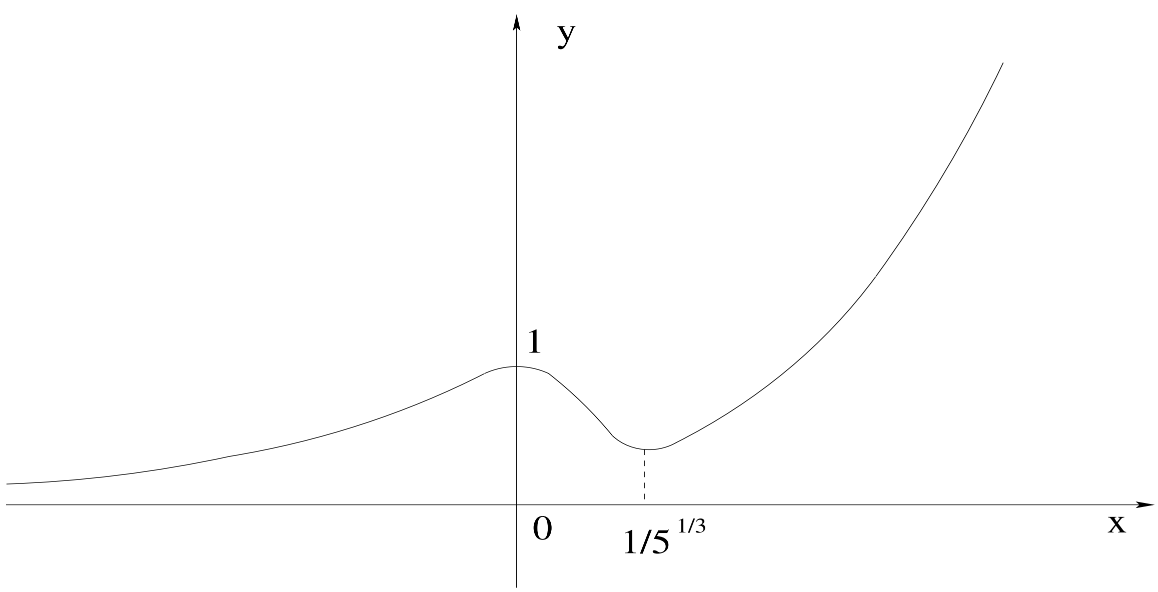
Gli zeri di f' sono 0, $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ da cui

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad \text{oppure} \quad x < 0$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 \,<\, x \,<\, \frac{1}{\sqrt[3]{5}},$$

di conseguenza

$$f \quad \text{è crescente per} \quad x > \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad \text{oppure} \quad x < 0$$
$$f \quad \text{è decrescente per} \quad 0 \,<\, x \,<\, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Da cui si deduce in particolare che $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ è un punto di *minimo relativo*, $x_2 = 0$ è un punto di *massimo relativo*. Il grafico di f è il seguente



Esercizio 3. (punti 8)

Calcolare

$$\int x \arctan(x-3)\, dx$$

Svolgimento.
Procediamo mediante l'*integrazione per parti*:

$$\int x \arctan(x-3)\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \arctan(x-3) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+(x-3)^2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\, x^2 \arctan(x-3) - \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{6x-10}{x^2-6x+10}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\, x^2 \arctan(x-3) - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}\, dx - 4 \int \frac{1}{x^2-6x+10}\, dx =$$
$$== \frac{1}{2}\, x^2 \arctan(x-3) - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\, \log(x^2-6x+10) - 4 \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\, x^2 \arctan(x-3) - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \log(x^2-6x+10) - 4 \arctan(x-3) + C.$$

Esercizio 4. (punti 7)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)\ \sin x^4}{e^{\frac{x^4}{2}} - \cos x^2}$$

Svolgimento. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite

$$e^{\frac{x^4}{2}} = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{8} x^8 + o(x^8),$$
$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8 + o(x^8),$$
$$\sin x^4 = x^4 + o(x^4)$$
$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^4).$$

Sostituendo queste espressioni nel linite assegnato, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^6 + o(x^6)}{x^4 + o(x^4)} = 0.$$