ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 5/11/2007 - FILA 1

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log \sqrt{1 - |1 - x^2| - x}$$

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \log\left(\frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}\right).$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona decrescente.
2. Dimostrare che $\inf_{\mathbb{N}} a_n = \log \frac{1}{2}$.
3. Dire se il l'estremo inferiore è anche minimo.
4. Calcolare il massimo, se esiste.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{2^n - 1}{4^n}.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 5/11/2007 - FILA 2

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (f \circ h \circ g)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log \sqrt{|4 - x^2| + x - 2}$$

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \sqrt{\frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 2}}.$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona crescente.
2. Dimostrare che $\sup_{\mathbb{N}} a_n = \sqrt{2}$.
3. Dire se il l'estremo superiore è anche massimo.
4. Calcolare il minimo, se esiste.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 3^n}{9^n}.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 5/11/2007 - FILA 3

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (h \circ f \circ g)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_3 |x^2 + 2x|}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}}.$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona decrescente.
2. Dimostrare che $\inf_{\mathbb{N}} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Dire se il l'estremo inferiore è anche minimo.
4. Calcolare il massimo, se esiste.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} = 2^{n+2}\,(2^n - 1).$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 5/11/2007 - FILA 4

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (g \circ f \circ h)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2 |x^2 - x|}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \log\left(\frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 2}\right).$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona crescente.
2. Dimostrare che $\sup_{\mathbb{N}} a_n = \log 2$.
3. Dire se il l'estremo superiore è anche massimo.
4. Calcolare il minimo, se esiste.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = \frac{1 - 3^n}{2}\, 3^{n+2}.$$

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 1

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

SVOLGIMENTO
1.

$$F(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f(g(x^2 - 1)) = f(\log(x^2 - 1)) = \frac{1}{\log(x^2 - 1)}.$$

2. Per determinare il C. E. di F dobbiamo imporre che l'argomento della funzione logaritmo si positivo ed il denominatore della frazione si diverso da zero, quindi:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \log(x^2 - 1) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \ \vee \ 1 < x \\ x^2 - 1 \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x < -1 \ \vee \ 1 < x \\ x^2 \neq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \ \vee \ 1 < x \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi $C.E. = \{x : x < -1 \ \wedge \ x \neq -\sqrt{2}\} \cup \{x : 1 < x \ \wedge \ x \neq \sqrt{2}\}$.

3. F non è monòtona su C.E. perché $\forall x, \ F(x) = F(-x)$ e quindi nemmeno iniettiva. Consideriamo la sua restrizione a $(\sqrt{2}, +\infty)$ Quindi verifichiamo che $\forall x_1, \, x_2 \in (\sqrt{2}, +\infty)$: $x_1 < x_2 \iff F(x_1) > F(x_2)$, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in (\sqrt{2}, +\infty), \ \frac{1}{\log(x_1^2 - 1)} > \frac{1}{\log(x_2^2 - 1)} \iff \log(x_2^2 - 1) > \log(x_1^2 - 1), \qquad (1)$$

Perché se $\sqrt{2} < x$ allora $1 < x^2 - 1$ e quindi $0 < \log(x^2 - 1)$. Per la proprietà di monotonia della funzione *logaritmo* si ha che (1) equivale a

$$x_2^2 - 1 > x_1^2 - 1 \iff x_2^2 > x_1^2 \iff x_2 > x_1, \quad \text{(si tenga presente che } x_1, \, x_2 > 0).$$

4.

L'immagine di F ristretta all'intervallo $(\sqrt{2}, +\infty)$ è, per definizione $\{y \in \mathbb{R} : y = F(x),\ \ x \in (\sqrt{2}, +\infty)\}$. Ovvero, per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = F(x)$ ammette soluzioni in $(\sqrt{2}, +\infty)$? Consideriamo quindi l'equazione:

$$y \ = \ \frac{1}{\log(x^2 - 1)}$$

ovvero se $y \neq 0$

$$\log(x^2-1) = \frac{1}{y} \iff x^2 - 1 = e^{\frac{1}{y}} \iff x^2 = e^{\frac{1}{y}} + 1 \iff x = \sqrt{e^{\frac{1}{y}} + 1}$$

Davanti alla radice abbiamo preso il segno + perché $x > \sqrt{2}$. Inoltre, affinché risulti $x > \sqrt{2}$ si deve avere

$$e^{\frac{1}{y}} + 1 > 2 \iff e^{\frac{1}{y}} > 1 \iff \frac{1}{y} > 0$$

Ovvero $y > 0$. Possiamo concludere che l'immagine di F, ristretta a $(\sqrt{2}, +\infty)$, è: $\{y : \ y > 0\}$ mentre la sua inversa è $F^{-1}(y) = \sqrt{e^{\frac{1}{y}} + 1}$.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) \ = \ \log \sqrt{1 \ - \ |1 \ - \ x^2| \ - \ x}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione logaritmo* è difinita quando il suo argomento è strettamente maggiore di zero, mentre la *funzione radice quadrata* è definita se il suo argomento è maggiore o uguale a zero. Tenuto conto di queste osservazioni possiamo scrivere

$$1 \ - \ |1 \ - \ x^2| \ - \ x \ > \ 0.$$

Da cui otteniamo, tenuto conto della definizione di *valore assoluto*

$$\begin{cases} 1 - x^2 \ \geq \ 0 \\ 1 \ - \ (1 - x^2) \ - \ x \ > \ 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - x^2 \ < \ 0 \\ 1 \ - \ [-(1 - x^2)] \ - \ x \ > \ 0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} 1 - x^2 \ \geq \ 0 \\ x^2 \ - \ x \ > \ 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - x^2 \ < \ 0 \\ -x^2 \ - \ x \ + \ 2 \ > \ 0 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado che compaiono nei sistemi otteniamo

$$\begin{cases} -1 \ \leq \ x \ \leq \ 1 \\ x \ < \ 0 \quad \vee \quad 1 \ < \ x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \ < \ -1 \quad \vee \quad 1 \ < \ x \\ -2 \ < \ x \ < \ 1 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $-1 \ \leq \ x \ < \ 0$, mentre il secondo sistema $-2 \ < \ x \ < \ -1$. Possiamo quindi concludere che il C.E. della funzione data è l'intervallo $(-2, 0)$

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \log\left(\frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}\right).$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona decrescente.
2. Dimostrare che $\inf_{\mathbb{N}} a_n = \log\frac{1}{2}$.
3. Dire se il l'estremo inferiore è anche minimo.
4. Calcolare il massimo, se esiste.

SVOLGIMENTO

1. Dobbiamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} < a_n$, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \log\left[\frac{(n+1)^2 + 2}{2\,(n+1)^2 - 1}\right] < \log\left(\frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}\right).$$

Utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo:*
se $a > 1\ \forall x_1, x_2 > 0,\quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$, ed ottenniamo

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{(n+1)^2 + 2}{2\,(n+1)^2 - 1} < \frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}.$$

I denominatori delle frazioni che compaiono nella diseguaglianza sono positivi, quindi

$$(n^2 + 2n + 3)\,(2n^2 - 1) < (n^2 + 2)\,(2n^2 + 4n + 1).$$

che equivale a

$$0 < 10\,n + 5$$

che e verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, CVD.

2.
Ricordiamo che il numero reale l è $l = \inf_{\mathbb{N}} a_n$ se e solo se sono verificate le due condizioni:
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\ \ l \le a_n$;
$(ii) \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N}:\ \ a_\nu < l + \varepsilon$.
Nel nostro caso
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\ \ \log\frac{1}{2} \le \log\left(\frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}\right)$
$(ii) \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N}:\ \ \log\left(\frac{\nu^2 + 2}{2\,\nu^2 - 1}\right) < \log\frac{1}{2} + \varepsilon = \log\frac{1}{2} + \log e^\varepsilon = \log\frac{1}{2}e^\varepsilon$ Utilizzando la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo* la condizione (i) equivale alla seguente:
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\ \ \frac{1}{2} \le \frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1}$ ovvero $2n^2 - 1 \le 2n^2 + 4$, che è sempre verificata.

Consideriamo (ii). Anche in questo caso utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo* ottenendo dalla relazione scritta sopra

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \dfrac{\nu^2 + 2}{2\,\nu^2 - 1} < \dfrac{1}{2} e^{\varepsilon} \iff 4 + e^{\varepsilon} < 2\nu^2(e^{\varepsilon} - 1)$ da cui segue che per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile determinare un numero naturale ν tale che $\sqrt{\dfrac{4 + e^{\varepsilon}}{2(e^{\varepsilon} - 1)}} < \nu$.

3. L'estremo inferiore non è minimo in quanto dovrebbe esistere un numero naturale n_0 tale che

$$\log\left(\frac{n_0^2 + 2}{2\,n_0^2 - 1}\right) = \log\frac{1}{2}.$$

ovvero

$$\frac{n_0^2 + 2}{2\,n_0^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

che non è verificata per alcun numero naturale perché equivale a $2n_0^2 + 4 = 2n_0^2 - 1$, che è ovviamente falsa.

4. Poiché la successione data è decrescente risulta:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$ quindi a_1 è il massimo della successione ovvero
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le a_1 = \log 3$.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{2^n - 1}{4^n}.$$

SVOLGIMENTO.

Per $n = 1$ si ottiene
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{3 - 2^1}{4^1}$ che è uguale a $\dfrac{2^1 - 1}{4^1}$.

Verifichiamo l'induttività della proposizione: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ dove
$\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{2^n - 1}{4^n}$, ed ovviamente $\mathcal{P}(n+1) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{2^{(n+1)} - 1}{4^{n+1}}$.

Consideriamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3 - 2^k}{4^k} = (\text{per l'ipotesi induttiva}) = \frac{3 - 2^{n+1}}{4^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{3 - 2^{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{2^n - 1}{4^n} =$$

$$= \frac{3 - 2^{n+1} + 4 \cdot 2^n - 4}{4^{n+1}} = \frac{-2^{n+1} + 2 \cdot 2 \cdot 2^n - 1}{4^{n+1}} = \frac{-2^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1} - 1}{4^{n+1}} == \frac{2^{n+1} - 1}{4^{n+1}}.$$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 2

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (f \circ h \circ g)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

SVOLGIMENTO.

1.
$F(x) = (f \circ h \circ g)(x) = f(h(\log x)) = f(\log x - 1) = \dfrac{1}{\log x - 1}$.

2.
Per determinare il C.E. di F dobbiamo imporre che il denominatore della frazione sia diverso da zero e che l'argomento della *funzione logaritmo* sia strettamente positivo, quindi:

$$\begin{cases} \log x - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq e \\ x > 0 \end{cases}$$

Quindi, C.E. $= (0, +\infty) \setminus \{e\}$.

3.
Osserviamo che la funzione risulta negativa se $0 < x < e$ perché il denominatore è negativo: $\log x < 1$ se $0 < x < e$, risulta invece positiva se $e < x$. Inoltre si ha che
$\forall x_1,\, x_2 > e,\ x_1 < x_2 \iff F(x_1) > F(x_2)$ infatti
$\forall x_1, x_2 > e,\ x_1 < x_2 \iff \log x_1 < \log x_2 \iff \log x_1 - 1 < \log x_2 - 1$ essendo poi $\forall x_1, x_2 > e$, $\log x_1 - 1 > 0$ e $\log x_2 - 1 > 0$ segue
$\dfrac{1}{\log x_1 - 1} > \dfrac{1}{\log x_2 - 1}$.
Analogo discorso nell'altro intervallo. E' chiaro che la funzione non può essere monòtona sul suo C.E. in quanto è decrescente su ciascuno dei due intervalli, mentre i valori sull'intervallo $(0, e)$ risultano minori (perché negativi) dei valori su $(e, +\infty)$ che sono positivi.

4.
Da $y = \dfrac{1}{\log x - 1}$, per $y \neq 0$, si ricava $\log x = \dfrac{1}{y} + 1$. Per definizione di *logaritmo:* $x = e^{\frac{1}{y}+1}$ perciò $f^{-1}(y) = e^{\frac{1}{y}+1}$. L'immagine di f ristretta all'intervallo $(e, +\infty)$ si trova risolvendo la disequazione $x = e^{\frac{1}{y}+1} > e$, ovvero $\dfrac{1}{y} > 0$ e quindi $y > 0$. Analogamente L'immagine di f ristretta all'intervallo (0,e) si trova risolvendo la disequazione $x = e^{\frac{1}{y}+1} < e$, da cui $\dfrac{1}{y} < 0$ ovvero $y < 0$.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) \,=\, \log\,\sqrt{|4\,-\,x^2|\,+\,x\,-\,2}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione logaritmo* è difinita quando il suo argomento è strettamente maggiore di zero, mentre la *funzione radice quadrata* è definita se il suo argomneto è maggiore o uguale a zero. Tenuto conto di queste osservazioni possiamo scrivere

$$|4\,-\,x^2|\,+\,x\,-\,2\,>\,0.$$

Da cui otteniamo, tenuto conto della definizione di *valore assoluto*

$$\begin{cases} 4-x^2\,\geq\,0 \\ 4-x^2\,+\,x\,-\,2\,>\,0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 4-x^2\,<\,0 \\ -(4-x^2)\,+\,x\,-\,2\,>\,0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} 4-x^2\,\geq\,0 \\ -x^2\,+\,x\,+\,2\,>\,0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 4-x^2\,<\,0 \\ x^2\,+\,x\,-\,6\,>\,0 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado che compaiono nei sistemi otteniamo

$$\begin{cases} -2\,\leq\,x\,\leq\,2 \\ -1\,<\,x\,<\,2 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x\,<\,-2 \quad \vee \quad 2\,<\,x \\ x\,<\,-3 \quad \vee \quad 2\,<\,x \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $-1 \leq x < 2$, mentre il secondo sistema $x < -3$ oppure $2\,<\,x$. Possiamo quindi concludere che il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli: $(-\infty, -3)\cup$ $(-1, 2)\cup$ $(2, +\infty)$.

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n \,=\, \sqrt{\frac{2\,n^2\,-\,1}{n^2\,+\,2}}.$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona crescente.
2. Dimostrare che $\sup\limits_{\mathbb{N}}\, a_n \,=\, \sqrt{2}$.
3. Dire se il l'estremo superiore è anche massimo.
4. Calcolare il minimo, se esiste.

SVOLGIMENTO

1. Dobbiamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \ < \ a_{n+1}$, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{2\,n^2\, -\, 1}{n^2\, +\, 2}} \ < \ \sqrt{\frac{2(n+1)^2\, -\, 1}{(n+1)^2\, +\, 2}}.$$

Utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione radice:*
$\forall x_1, x_2 > 0, \quad x_1 < x_2 \iff \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, ed otteniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n^2\, -\, 1}{n^2\, +\, 2} \ < \ \frac{2(n+1)^2\, -\, 1}{(n+1)^2\, +\, 2}.$$

I denominatori delle frazioni che compaiono nella diseguaglianza sono positivi, quindi

$$(2n^2 - 1)\,(n^2 + 2n + 3) \ < \ (n^2 + 2)\,(2n^2 + 4n + 1).$$

che equivale a

$$0 < 10\,n\, +\, 5$$

che e verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, CVD.

2.
Ricordiamo che il numero reale L è $L = \sup\limits_{\mathbb{N}} a_n$ se e solo se sono verificate le due condizioni:
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \ \leq L;$
$(ii) \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N}: \ \ L - \varepsilon < a_\nu$
Nel nostro caso
$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{2n^2\, -\, 1}{n^2\, +\, 2}} \leq \sqrt{2}$
$(ii) \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N}: \quad \sqrt{2} - \varepsilon \ < \ \sqrt{\frac{2\nu^2\, -\, 1}{\nu^2\, +\, 2}}$
Utilizzando la proprietà di monòtonia della *funzione radice* la condizione (i) equivale alla seguente:
$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \frac{2n^2\, -\, 1}{n^2\, +\, 2} \ \leq \ 2$ ovvero $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + 4$, che è sempre verificata.
Consideriamo (ii). Anche in questo caso utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione radice* ottenendo dalla relazione scritta sopra (se $\varepsilon < \sqrt{2}$, altrimenti è verificata per ogni $\nu \in \mathbb{N}$)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}: \quad (\sqrt{2} - \varepsilon)^2 \ < \ \frac{2\nu^2\, -\, 1}{\nu^2\, +\, 2} \quad \iff \quad (\nu^2 + 2)(\sqrt{2} - \varepsilon)^2 \ < \ 2\nu^2 - 1$ da cui segue che per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile determinare un numero naturale ν tale che $\sqrt{\frac{2(\sqrt{2} - \varepsilon)^2 + 1}{2 - (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}} < \nu.$

3. L'estremo superiore non è massimo in quanto dovrebbe esistere un numero naturale n_0 tale che

$$\sqrt{\frac{2n_0^2\, -\, 1}{n_0^2\, +\, 2}} \ = \ \sqrt{2}.$$

che non è verificata per alcun numero naturale perché equivale a $2n_0^2 + 4 = 2n_0^2 - 1$, che è ovviamente falsa.

4. Poiché la successione data è crescente risulta:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n > \cdots > a_3 > a_2 > a_1$ quindi a_1 è il minimo della successione ovvero
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 4. (Punti 7)
Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 3^n}{9^n}.$$

SVOLGIMENTO.

Per $n = 1$ si ottiene
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{3^1 - 4}{9^1}$ che è uguale a $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - 3}{9^1}$.

Verifichiamo l'induttività della proposizione: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ dove
$\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 3^n}{9^n}$. ed ovviamente $\mathcal{P}(n+1) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 3^{n+1}}{9^{n+1}}$.
Consideriamo:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k - 4}{9^k}$ = (per l'ipotesi induttiva) $= \dfrac{3^{n+1} - 4}{9^{n+1}} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - 3^n}{9^n}$.
$= \dfrac{2 \cdot 3^{n+1} - 8 + 9 - 9 \cdot 3^n}{2 \cdot 9^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 + 2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 3 \cdot 3^n}{9^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 + 2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 3^{n+1}}{9^{n+1}} =$
$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - 3^{n+1}}{9^{n+1}}$.

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 3

Esercizio 1. (Punti 10)
Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (h \circ f \circ g)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

SVOLGIMENTO

1.

$F(x) = (h \circ f \circ g)(x) = h(f(g(x))) = h(f(\log x)) = h\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{(\log x)^2} - 1.$

2.

La funzione è definita per i valori di x per i quali si ha

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Quindi C.E. $= (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

3.

La funzione non è monòtona sul suo C.E. perché per ogni $x > 1$ si ha che
$F(x) = \frac{1}{(\log x)^2} - 1 = \frac{1}{(-\log \frac{1}{x})^2} - 1 = F(\frac{1}{x})$.
F risulta invece monotòna decrescente su ciascuno degli intervalli $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Infatti per ogni x_1, $x_2 > 1$ risulta
$x_1 < x_2 \iff F(x_1) > F(x_2)$ perché $\frac{1}{(\log x_1)^2} - 1 > \frac{1}{(\log x_2)^2} - 1 \iff (\log x_1)^2 < (\log x_2)^2$
nell'intervallo considerato la funzione logaritmo risulta positiva quindi la disequazione sopra equivale alla seguente $\log x_1 < \log x_2$ da cui $x_1 < x_2$. Analogo discorso nell'intervallo $(0, 1)$.

4.

Dall'equazione $y = \frac{1}{(\log x)^2} - 1$ ricaviamo per $y \neq -1$, $(\log x)^2 = \frac{1}{y+1}$ da cui $\log x = \pm\sqrt{\frac{1}{y+1}}$. da questa deduciamo che l'inversa di F ristretta all'intervallo $(0, 1)$ è
$F^{-1}(y) = e^{-\sqrt{\frac{1}{y+1}}}$, perché in questo intervallo $\log x < 0$ mentre l'inversa di F ristretta all'intervallo $(1, +\infty)$ è $F^{-1}(y) = e^{\sqrt{\frac{1}{y+1}}}$, perché in questo intervallo $\log x > 0$.
Per determinare l'immagine di F ristretta a $(1, +\infty)$ risolviamo la disequazione in y imponendo che x appartenga a questo intervallo
$x = e^{\sqrt{\frac{1}{y+1}}} > 1 = e^0$, che equivale a $\sqrt{\frac{1}{y+1}} > 0 \wedge \frac{1}{y+1} \geq 0$, da cui si ottiene $y + 1 > 0$ e quindi $y > -1$.
Analogo discorso nell'intervallo $(0, 1)$.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_3 |x^2 + 2x|}.$$

SVOLGIMENTO

La *funzione radice quadrata* è definita quando il suo argomento è maggiore o uguale a zero, mentre la *funzione logaritmo* quando il suo argomento è strettamente positivo. Tenuto conto di queste osservazioni scriviamo

$$\begin{cases} 1 - \log_3 |x^2 + 2x| \geq 0 \\ |x^2 + 2x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \log_3 |x^2 + 2x| \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases}$$

Dalla definizione di *valore assoluto* e da quanto scritto sopra si ha

$$\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ 1 \geq \log_3(x^2+2x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2+2x < 0 \\ 1 \geq \log_3[-(x^2+2x)], \end{cases}$$

Tenuto conto della seguente proprietà di *logaritmo*: se $a > 1$, $1 \geq \log_a b$ se e solo se $a \geq b$, i sistemi sopra equivalgono ai seguenti

$$\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ 3 \geq x^2+2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2+2x < 0 \\ 3 \geq -(x^2+2x), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ 0 \geq x^2+2x-3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2+2x < 0 \\ x^2+2x+3 \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x < -2 \vee 0 < x \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $-3 < x < -2$ oppure $0 < x \leq 1$, del secondo $-2 < x < 0$. In conclusione il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli $[-3,-2) \cup (-2,0) \cup (0,1]$.
Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}.$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona decrescente.
2. Dimostrare che $\inf_{\mathbb{N}} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Dire se il l'estremo inferiore è anche minimo.
4. Calcolare il massimo, se esiste.

SVOLGIMENTO

1. Dobbiamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} < a_n$, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{(n+1)^2+2}{2(n+1)^2-1}} < \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}.$$

Utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione radice:*
$\forall x_1, x_2 > 0, \quad x_1 < x_2 \iff \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, ed ottenniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(n+1)^2+2}{2(n+1)^2-1} < \frac{n^2+2}{2n^2-1}.$$

I denominatori delle frazioni che compaiono nella diseguaglianza sono positivi, quindi

$$(n^2 + 2n + 3)\,(2n^2 - 1) \;<\; (n^2 + 1)\,(2n^2 + 4n + 1).$$

che equivale a

$$0 < 10\,n \,+\, 5$$

che e verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, CVD.

2.
Ricordiamo che il numero reale l è $l = \inf\limits_{\mathbb{N}} a_n$ se e solo se sono verificate le due condizioni:
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\;\; l \leq a_n$;
$(ii) \forall \varepsilon > 0 \;\exists \nu \in \mathbb{N}:\;\; a_\nu < l + \varepsilon$.
Nel nostro caso
$(i) \forall n \in \mathbb{N},\;\; \sqrt{\dfrac{1}{2}} \leq \sqrt{\dfrac{n^2 \,+\, 2}{2\,n^2 \,-\, 1}}$
$(ii) \forall \varepsilon > 0 \;\exists \nu \in \mathbb{N}:\;\; \sqrt{\dfrac{\nu^2 \,+\, 2}{2\,\nu^2 \,-\, 1}} \;<\; \sqrt{\dfrac{1}{2}} + \varepsilon$. Utilizzando la proprietà di monòtonia della *funzione radice* la condizione (i) equivale alla seguente: $(i) \forall n \in \mathbb{N},\;\; \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n^2 \,+\, 2}{2\,n^2 \,-\, 1}$ ovvero $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + 4$, che è sempre verificata.
Consideriamo (ii). Anche in questo caso utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione radice* ottenendo dalla relazione scritta sopra
$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \nu \in \mathbb{N}:\;\; \dfrac{\nu^2 \,+\, 2}{2\,\nu^2 \,-\, 1} \;<\; \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \varepsilon\right)^2$. Da cui segue che per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile determinare un numero naturale ν tale che $\sqrt{\dfrac{2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)^2 - 1}} < \nu$.

3. L'estremo inferiore non è minimo in quanto dovrebbe esistere un numero naturale n_0 tale che

$$\sqrt{\frac{n_0^2 \,+\, 2}{2\,n_0^2 \,-\, 1}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

ovvero

$$\frac{n_0^2 \,+\, 2}{2\,n_0^2 \,-\, 1} \;=\; \frac{1}{2}.$$

che non è verificata per alcun numero naturale perché equivale a $2n_0^2 + 4 = 2n_0^2 - 1$, che è ovviamente falsa.

4. Poiché la successione data è decrescente risulta:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$ quindi a_1 è il massimo della successione ovvero
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_1 = \sqrt{3}$.

Esercizio 4. (Punti 7)

Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} = 2^{n+2}\,(2^n - 1).$$

SVOLGIMENTO.

Per $n = 1$ si ottiene

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} = (3 \cdot 2^{1-1} - 1)\, 2^{1+1}$, che è uguale a $2^{1+2}(2^1 - 1)$.

Verifichiamo l'induttività della proposizione: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ dove

$\displaystyle\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} = 2^{n+2}\,(2^n - 1)$ ed ovviamente $\mathcal{P}(n+1)$:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} = 2^{n+3}\,(2^{n+1} - 1).$

Consideriamo:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)\, 2^{k+1} =$ (per l'ipotesi induttiva)

$= (3 \cdot 2^{n+1-1} - 1)\, 2^{n+1+1} + 2^{n+2}\,(2^n - 1) = (3 \cdot 2^n - 1)\, 2^{n+2} + 2^{n+2}\,(2^n - 1) =$

$= 3\cdot 2^{2n+2} - 2^{n+2} + 2^{2n+2} - 2^{n+2} = 4\cdot 2^{2n+2} - 2\cdot 2^{n+2} = 2\cdot 2^{n+2}(2\cdot 2^n - 1) = 2^{n+3}(2^{n+1} - 1).$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 4

Esercizio 1. (Punti 10)

Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \log x, \quad , \quad h(x) = x^2 - 1.$$

1. Scrivere la funzione composta: $F(x) = (g \circ f \circ h)(x)$.
2. Trovare il campo di esistenza di $F(x)$.
3. Dimostrare che è monòtona in uno degli intervalli (a scelta) del campo di esistenza.
4. Determinate l'immagine e l'inversa della funzione ristretta a quest'intervallo.

SVOLGIMENTO

1.

$F(x) = (g \circ f \circ h)(x) = g(f(x^2 - 1)) = g\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right) = \log\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right)$

2.

F è definita per i valori di x per i quali l'argomento del *logaritmo* è positivo e quelli per i quali il denominatore della frazione è diverso da zero quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} > 0 \\ \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases}$$

Da cui segue che C.E. $= (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

3.
F non è monòtona sul suo C.E. perché risulta per ogni x appartenente a $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$: $F(x) = F(-x)$. Dimostriamo quindi che risulta monòtona decrescente sulla semiretta $(1,+\infty)$, ovvero
$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty),\ x_1 < x_2 \iff F(x_1) > F(x_2)$.
Quindi
$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty),\ x_1 < x_2 \iff \log\left(\dfrac{1}{x_1^2-1}\right) > \log\left(\dfrac{1}{x_2^2-1}\right)$
Per la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo* la diseguaglianza sopra equivale alla seguente
$\dfrac{1}{x_1^2-1} > \dfrac{1}{x_2^2-1}$ da cui, essendo i denominatori positivi, $x_1^2-1 < x_2^2-1$ ovvero, dato che $x_1,\ x_2 > 0$ si ha infine $x_1 < x_2$.
Con considerazioni analoghe si dimostra che F è invece crescente sulla semiretta $(-\infty,-1)$.

4.
Consideriamo F ristretta all'intervallo $(1,+\infty)$.
$y = \log\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \iff e^y = \dfrac{1}{x^2-1} \iff x^2 = e^{-y}+1 \iff x = \sqrt{e^{-y}+1}$. Quindi $F^{-1}(y) = \sqrt{e^{-y}+1}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$. Di conseguenza l'immagine di F ristretta all'intervallo $(1,+\infty)$ e tutto $\mathbb{R}$.
Se consideriamo invece F ristretta all'intervallo $(-\infty,-1)$ si ha $F^{-1}(y) = -\sqrt{e^{-y}+1}$. Anche su questo intervallo l'immagine di F è tutto R.

Esercizio 2. (Punti 8)
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2|x^2 - x|}.$$

SVOLGIMENTO

La *funzione radice quadrata* è definita quando il suo argomento è maggiore o uguale a zero, mentre la *funzione logaritmo* quando il suo argomento è strettamente positivo. Tenuto conto di queste osservazioni scriviamo

$$\begin{cases} 1 - \log_2|x^2 - x| \geq 0 \\ |x^2 - x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \log_2|x^2 - x| \geq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases}$$

Dalla definizione di *valore assoluto* e da quanto scritto sopra si ha

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 1 \geq \log_2(x^2 - x) \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ 1 \geq \log_2[-(x^2 - x)], \end{cases}$$

Tenuto conto della seguente proprietà di *logaritmo*: se $a > 1$, $1 \geq \log_a b$ se e solo se $a \geq b$, i sistemi sopra equivalgono ai seguenti

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 2 \geq x^2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ 2 \geq -(x^2 - x), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 0 \geq x^2 - x - 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x < 0 \vee 1 < x \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $-1 \leq x < 0$ oppure $1 < x \leq 2$, del secondo $0 < x < 1$. In conclusione il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli $[-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2]$.

Esercizio 3. (Punti 8)
Sia data la successione

$$a_n = \log\left(\frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 2}\right).$$

1. Dimostrare che a_n è monòtona crescente.
2. Dimostrare che $\sup\limits_{\mathbb{N}} a_n = \log 2$.
3. Dire se il l'estremo superiore è anche massimo.
4. Calcolare il minimo, se esiste.

SVOLGIMENTO

1. Dobbiamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \log\left(\frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) < \log\left(\frac{2(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 2}\right).$$

Utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo:*
$\forall x_1, x_2 > 0, \quad x_1 < x_2 \iff \log x_1 < \log x_2$, ed ottenniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2} < \frac{2(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 2}.$$

I denominatori delle frazioni che compaiono nella diseguaglianza sono positivi, quindi

$$(2n^2 - 1)\,(n^2 + 2n + 3) \; < \; (n^2 + 2)\,(2n^2 + 4n + 1).$$

che equivale a

$$0 < 10\,n \, + \, 5$$

che e verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, CVD.

2.
Ricordiamo che il numero reale L è $L = \sup\limits_{\mathbb{N}} a_n$ se e solo se sono verificate le due condizioni:
$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \;\; a_n \; \leq L;$
$(ii) \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu \in \mathbb{N} : \;\; L - \varepsilon < a_\nu$
Nel nostro caso
$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \log\left(\dfrac{2n^2 \, - \, 1}{n^2 \, + \, 2}\right) \leq \log 2$
$(ii) \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu \in \mathbb{N} : \;\; \log 2 - \varepsilon \; < \; \log\left(\dfrac{2\nu^2 \, - \, 1}{\nu^2 \, + \, 2}\right)$
Utilizzando la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo* la condizione (i) equivale alla seguente:
$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \dfrac{2n^2 \, - \, 1}{n^2 \, + \, 2} \; \leq \; 2$ ovvero $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + 4$, che è sempre verificata.
Consideriamo (ii). Anche in questo caso utilizziamo la proprietà di monòtonia della *funzione logaritmo* ottenendo dalla relazione scritta sopra
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu \in \mathbb{N} : \;\; \log 2 \, - \, \varepsilon < \log\left(\dfrac{2\nu^2 \, - \, 1}{\nu^2 \, + \, 2}\right) \iff \log 2 \, - \, \log e^\varepsilon \; < \; \log\left(\dfrac{2\nu^2 \, - \, 1}{\nu^2 \, + \, 2}\right)$
ovvero
$\log \dfrac{2}{e^\varepsilon} \; < \; \log\left(\dfrac{2\nu^2 \, - \, 1}{\nu^2 \, + \, 2}\right) \iff \dfrac{2}{e^\varepsilon} \; < \; \dfrac{2\nu^2 \, - \, 1}{\nu^2 \, + \, 2}.$
da cui segue che per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile determinare un numero naturale ν tale che $\sqrt{\dfrac{4 + e^\varepsilon}{2(e^\varepsilon - 1)}} < \nu.$

3. L'estremo superiore non è massimo in quanto dovrebbe esistere un numero naturale n_0 tale che

$$\log \frac{2n_0^2 \, - \, 1}{n_0^2 \, + \, 2} \; = \; \log 2.$$

che non è verificata per alcun numero naturale perché equivale a $2n_0^2 + 4 = 2n_0^2 - 1$, che è ovviamente falsa.

4. Poiché la successione data è crescente risulta:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n > \cdots > a_3 > a_2 > a_1$ quindi a_1 è il minimo della successione ovvero
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_1 = \log \dfrac{1}{3}.$

Esercizio 4. (Punti 7)

Dimostrare mediante il *principio di induzione* la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = \frac{1 - 3^n}{2}\, 3^{n+2}.$$

SVOLGIMENTO

Per $n = 1$ si ottiene
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = 3^{1+1} - 4 \cdot 3^{2\cdot 1}$ che è uguale a $\displaystyle\frac{1 - 3^1}{2}\, 3^{1+2}$.

Verifichiamo l'induttività della proposizione: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ dove
$\displaystyle\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = \frac{1 - 3^n}{2}\, 3^{n+2}$,
ed ovviamente $\mathcal{P}(n+1)$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = \frac{1 - 3^{n+1}}{2}\, 3^{n+3}$.

Consideriamo:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) =$ (per l'ipotesi induttiva) $\displaystyle = 3^{n+2} - 4 \cdot 3^{2(n+1)} + \frac{1 - 3^n}{2}\, 3^{n+2} =$
$\displaystyle = 3^{n+2} - 4 \cdot 3^{2n+2} + \frac{1}{2}\, 3^{n+2} - \frac{1}{2}\, 3^{2n+2} = \frac{3}{2}\, 3^{n+2} - \frac{9}{2}\, 3^{2n+2} =$
$\displaystyle = \frac{3}{2}\, 3^{n+2}\, (1 - 3 \cdot 3^n) = \frac{1}{2}\, 3^{n+3}(1 - 3^{n+1})$.