ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 3/2/2005

Esercizio 1.(punti 8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 10 = 0$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 1; y'(0) = 1$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \ = \ x \ + \ \arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{x - 1},$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Esercizio 3.(punti 8) Calcolare:

$$\int_2^3 \ (x-2) \log \frac{x+1}{x-2} \ dx$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n \ x^n.$$

SOLUZIONE ESERCIZI

Esercizio 1.(punti 8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 10 = 0$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 1; y'(0) = 1$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea. Determiniamo le radici del polinomio caratteristico risolvendo l'equazione

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è in campo complesso è dato dall'espressione

$$y(x) = Ae^{-x+3ix} + Be^{-x-3ix}, \;\; A, B \in \mathbb{C},$$

da cui deduciamo quella in campo reale

$$y(x) = Ae^{-x}\cos 3x + Be^{-x}\sin 3x, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Per determinare la soluzione y_i che verifica le condizioni iniziali calcoliamo la derivata prima di y

$$y'(x) = -Ae^{-x}\cos 3x - 3Ae^{-x}\sin 3x - Be^{-x}\sin 3x + 3Be^{-x}\cos 3x = 0 \tag{2}$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 1$ in (1) e $y'(0) = 1$ in (2), otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 & = & 1 \\ -A \cdot 1 + 3B \cdot 1 & = & 1, \end{cases}$$

da cui si ha $A = 1$, $B = \frac{2}{3}$. In definitiva la soluzione cercata è la funzione

$$y(x) = e^{-x}\cos 3x + \frac{2}{3}e^{-x}\sin 3x.$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \;\; = \;\; x \;\; + \;\; \arctan\frac{x + \frac{1}{2}}{x-1},$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

Il C.E. della funzione è dato dall'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 1 + \arctan\frac{\frac{3}{2}}{0^+} = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

(perchè $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$).

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 1 + \arctan \frac{\frac{3}{2}}{0^-} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

(perchè $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$). La retta $x = 1$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

. Vediamo se esistono asintoti all'infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x} \arctan \frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan \frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

L'equazione dell'asintoto per $x \to \pm\infty$ è

$$y = \frac{\pi}{4}\, x + 1$$

Calcoliamo la derivata prima.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x-1}\right)^2} \quad \frac{x-1-x-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} = && (3)\\ &= 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2+(x+\frac{1}{2})^2} = && (4)\\ &= \frac{8x^2-4x-1}{2[(x-1)^2+(x+\frac{1}{2})^2]} && (5) \end{aligned}$$

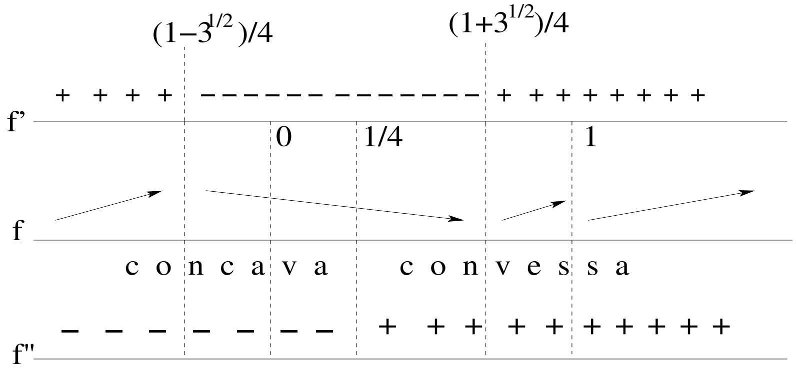
Il segno di f' è determinato dal segno del numeratore di 5. Possiamo considerare l'equazione $8x^2 - 4x - 1 = 0$ le radici sono $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$. Quindi $f'(x) < 0$ per x appartenente all'intervallo delimitato dalle radici, mentre $f'(x) > 0$ per i valori di x esterni ad esso.

Studio della derivata seconda. Il calcolo di f'' risulta piú semplice derivando l'espressione di f' di (4). Otteniamo

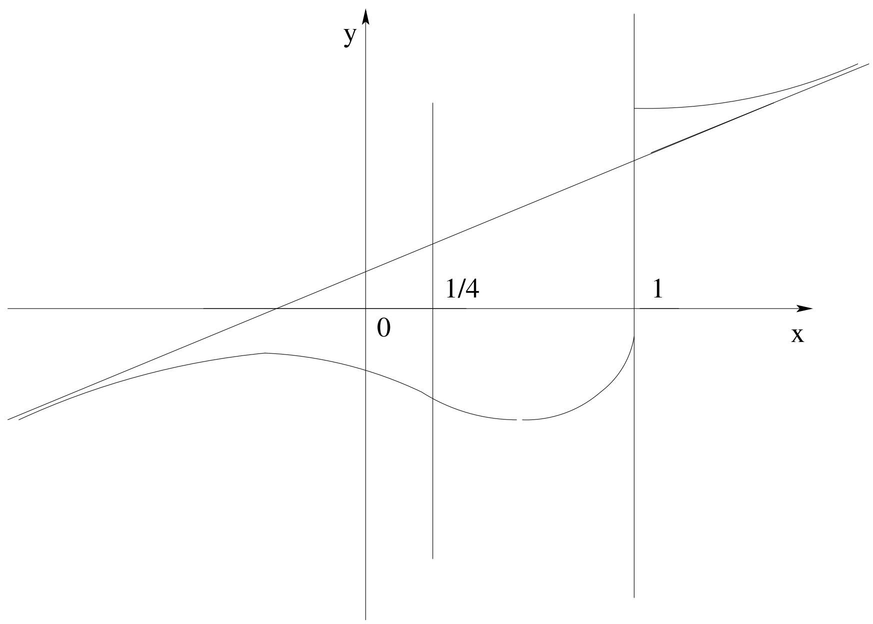
$$f''(x) = \frac{3\left(2x-\frac{1}{2}\right)}{\left[(x-1)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

Da cui $f'' > 0$ per $x > \frac{1}{4}$. Quindi su questa semiretta f risulta *convessa*. Metre f risulta *concava* per $x < \frac{1}{4}$.

Riassumiamo nello schema seguente quanto ottenuto.



Questo schema ci fornisce gli elementi per tracciare il grafico della funzione.



Esercizio 3.(punti 8) Calcolare:

$$\int_2^3 (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx$$

Soluzione. La funzione integranda non è definita nel punto $x = 2$ (che è uno dei due estremi di integrazione) in quanto si annulla il denominatore dell'argomento del *logaritmo*. L'integrale assegnato è un integrale improprio. Il suo valore si trova calcolando il limite:

$$\int_2^3 (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx = \lim_{a\to 2+}\int_a^3 (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx. \qquad (6)$$

Al secondo membro abbiamo così un integrale definito. Per calcolarlo consideriamo l'integrale indefinito

$$\int (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx, \qquad (7)$$

a tale scopo applichiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

prendendo

$$f'(x) = x - 2, \quad g(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

da cui

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad g'(x) = \frac{x-2}{x+1}\,\frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

Applicando la formula di integrazione per parti all'integrale indefinito (7) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}(x-2)^2\log\frac{x+1}{x-2} \;+\frac{3}{2}\int \frac{x-2}{x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}(x-2)^2\log\frac{x+1}{x-2} \;+\frac{3}{2}\int\left(1-\frac{3}{x+1}\right)dx = \\
&= \;\frac{1}{2}(x-2)^2\log\frac{x+1}{x-2} \;+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\log|x+1|+C
\end{aligned}$$

Sostituendo in (6):

$$\begin{aligned}
&\int_2^3 (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx = \lim_{a\to 2+}\int_a^3 (x-2)\,\log\frac{x+1}{x-2}\,dx = \\
&= \lim_{a\to 2+}\left[\frac{1}{2}(x-2)^2\log\frac{x+1}{x-2}\;+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\log|x+1|+C\right]_a^3 = \\
&= \lim_{a\to 2+}\left(\frac{1}{2}\log 4+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\log 4-(a-2)^2\log\frac{a+1}{a-2}\;-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}\log(a+1)\right) = \\
&= \frac{3}{2}+\frac{9}{2}\log 3-4\log 4
\end{aligned}$$

Perchè

$$\lim_{a\to 2+}(a-2)^2\log\frac{a+1}{a-2}\; = \lim_{a\to 2+}(a-2)^2\log(a+1)-(a-2)^2\log(a-2) = -\lim_{a\to 2+}(a-2)^2\log(a-2) = 0.$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n x^n.$$

Svolgimento

Studiamo la convergenza assoluta della serie, applicando il *criterio della radice ennesima*.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n}\;\sqrt[n]{|x|^n} = 2|x| < 1.$$

La serie risulta *assolutamente convergente* e (quindi *convergente*) per $|x| < \dfrac{1}{2}$.

Consideriamo il caso in cui $x = \dfrac{1}{2}$ ed esaminiamo il comportamento del termine generale della serie quando $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n \ \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \ \frac{1}{2^n} = \tag{8}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(1-\frac{1}{2n})^{(-2n)(\frac{-1}{2})}}{(1+\frac{1}{n})^n}\right] = \frac{1}{e\sqrt{e}} \tag{9}$$

Infatti, consideriamo

$$\lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{2n})^{(-2n)},$$

posto $x = -2n$, per $n \to +\infty$ si ha $x \to -\infty$ e quindi ci siamo ricondotti al limite notevole

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ritornando a (9), osserviamo che la serie risulta divergente perchè il termine generale è positivo e non infinitesimo.

Sia ora $x > \dfrac{1}{2}$. Anche in questo caso calcoliamo il limite del termine generale per $n \to +\infty$. Ragionando come nel caso precedente si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n \ x^n = \lim_{n\to+\infty} 2^n \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \ x^n = +\infty.$$

La serie *diverge* anche in questo caso.

Sia $x \leq -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n x^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \ |x|^n \ \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \quad \lim_{n\to+\infty} |x|^n \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$$

Il limite non esiste perchè la prima successione non ha limite mentre la seconda tende a $+\infty$. La serie in questo caso risulta *indeterminata*.