ANALISI MATEMATICA

(CORSO D - CdL INFORMATICA)

Prova scritta del 19/7/2004

(1) Determinare, mediante il polinomio di Taylor, i valori di $\alpha > 0$ e $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos \sqrt[4]{x} - e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}}}{x^\alpha} = L$$

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left(3x^2 + 6x + 6\right)$$

1. Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
3. Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
4. Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$$

1. dimostrare, che f risulta *integrabile in senso improprio* sull'intervallo (0,1];
2. calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

(4) Stabilire se la serie seguente risulta *convergente* oppure *divergente*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{2n} - (4n)^n\right].$$

Risoluzione degli esercizi proposti

(1) Determinare, mediante il polinomio di Taylor, i valori di $\alpha > 0$ e $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos\sqrt[4]{x} - e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}}}{x^\alpha} = L$$

Svolgimento

Consideriamo gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $y_0 = 0$, realtivi alle funzioni che compaiono nel limite:

$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y)$ per $y = -\frac{\sqrt{x}}{2}$ otteniamo $e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{8} + o(x).$

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$ per $y = \sqrt[4]{x}$ otteniamo $\cos\sqrt[4]{x} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{24} + o(x)$

Sostituiamo questi sviluppi al numeratore della funzione della quale dobbiamo calcolare il limite:

$$\cos\sqrt[4]{x} - e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{x}{24} - \frac{x}{8} + o(x)$$

Quindi l'espressione del limite diventa:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{12}x + o(x)}{x^\alpha} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{12}x}{x^\alpha} = -\frac{1}{12} \lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha} = -\frac{1}{12}$$

per $\alpha = 1$.

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left(3x^2 + 6x + 6\right)$$

1. Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
3. Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
4. Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il dominio di f è costituito dall'insieme dei valori di x che rendono positivo l'argomento della *funzione logaritmo*. Consideriamo perciò l'equazione

$$3x^2 + 6x + 6 = 0$$

Questa non ammette radici reali perchè $\Delta = -36 < 0$. Inoltre il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, quindi il polinomio è sempre positivo, ovvero $3x^2 + 6x + 6 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Il dominio di f è dunque tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

Determiniamo il comportamento di f agli estremi del suo dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Vediamo se esistono asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(Infatti basta osservare che la *funzione logaritmo* è un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza positiva di x. Oppure si può applicare la *regola dell' Hospital*.) La funzione non ammette asintoti obliqui.
Studio della derivata prima:

$$f'(x) = 2\frac{x+1}{x^2+2x+2} \tag{1}$$

Il denominatore della frazione è sempre positivo ($\Delta = -4 < 0$). Per conoscere il segno di f' basta considerare il numeratore.

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

La diseguaglianza $x + 1 > 0$ è verificata per $x > 1$ Quindi:

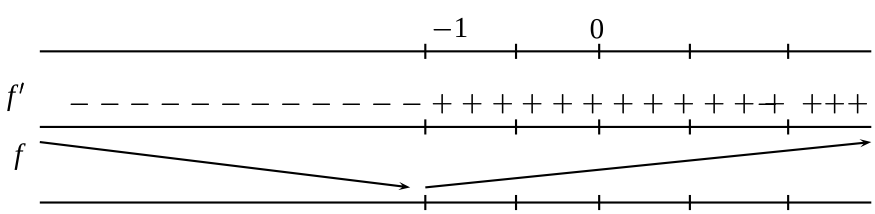
$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < 1.$$

Da queste osservazioni deduciamo che

$$f \quad \text{è crescente per} \quad x > 1$$
$$f \quad \text{è decrescente per} \quad x < 1$$

quindi il punto $x_1 = 1$ è un punto di *minimo relativo* per f.

Possiamo riassumere nel seguente schema quanto ottenuto.



Studio della derivata seconda.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\,\frac{(x^2+2x+2)\,-\,2(x+1)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \\ &= -2\,\frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$

Il segno di f'' è determinato dal segno del numeratore della frazione.

$$\begin{aligned} x(x+2) &> 0 \quad \text{per} \quad x>0 \text{ oppure } x<-2 \\ x(x+2) &< 0 \quad \text{per} \quad -2<x<0 \end{aligned}$$

Da cui, tenuto conto dell'espressione di f'' otteniamo

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \quad \text{per} \quad -2<x<0 \Longrightarrow f \text{ convessa per } -2<x<0 \\ f''(x) &< 0 \quad \text{per} \quad x<-2 \text{ oppure } x>0 \Longrightarrow f \text{ concava per } x<-2 \text{ oppure } x>0 \end{aligned}$$

I punti $x_2=-2$ e $x_3=0$ sono punti di flesso per f.

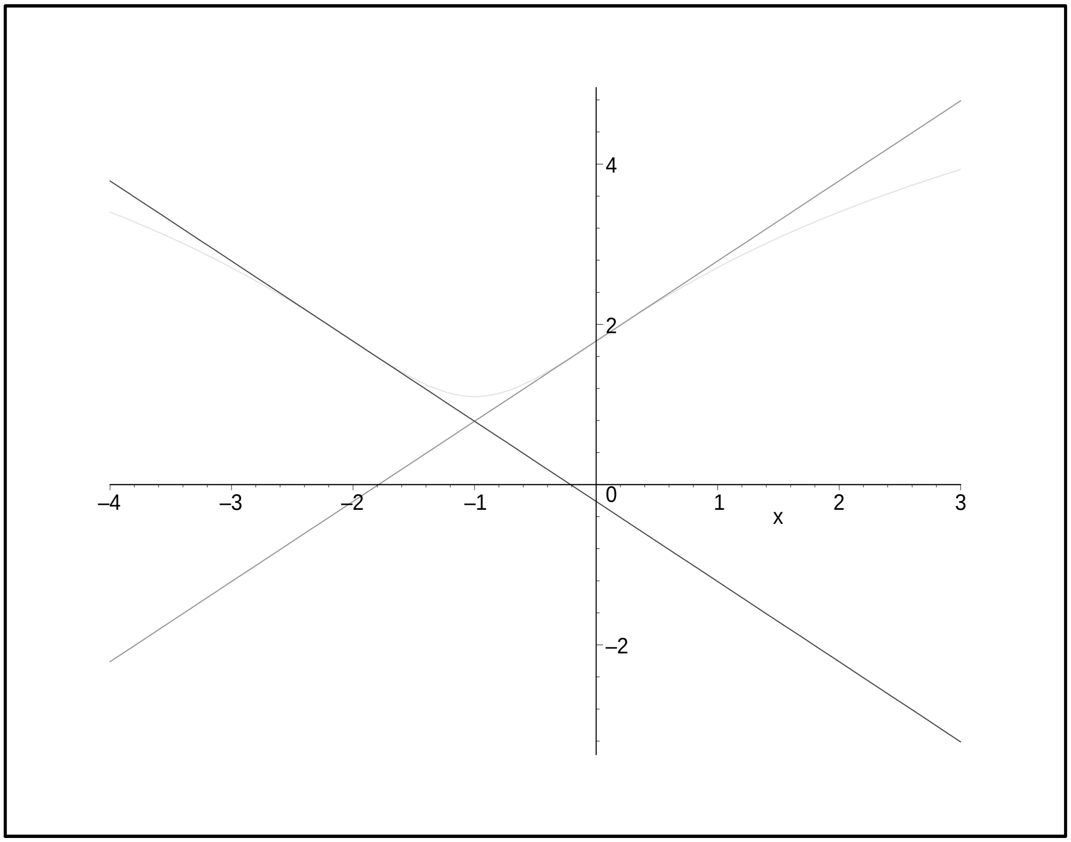
Possiamo calcolare le tangenti al grafico di f in questi punti.
Tangente al grafico nel punto $(-2, f(-2)) = (-2, \log 6)$

$$\varphi(x) = -x-2+\log 6$$

Tangente al grafico nel punto $(0, f(0)) = (0, \log 6)$

$$\psi(x) = x+\log 6.$$

Grafico della funzione



(3) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$$

1. dimostrare, che f risulta *integrabile in senso improprio* sull'intervallo (0,1];
2. calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Svolgimento (1) Nell'intervallo $(0,1]$ la funzione data risulta continua. La funzione non è definita nel punto $x=0$. Esaminiamo il suo comportamento in un intorno di questo punto calcolando

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = 1$$

$\left(\text{ponendo } t = \sqrt[3]{x} \text{ ci riportiamo al limite notevole } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1 \right)$
Poichè f risulta convergente per $x \to 0+$ essa risulta limitata in un intorno di $x=0$. In conclusione:

- f è continua su $(0,1]$;
- f è limitata su $(0,1]$.

ne segue che f è integrabile in *senso improprio* su $(0,1]$. [1]

Svolgimento (2)

Calcoliamo dunque le primitive della funzione integranda effettuando nell'integrale proposto il seguente cambiamento di variabile

$$\sqrt[3]{x} = t, \quad x = t^3, \; dx = 3t^2\, dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
\int 3t^{\cancel{2}} \frac{\log(1+t)}{\cancel{t}}\, dt &= \frac{3}{2}t^2 \log(1+t) - \frac{3}{2}\int t^2 \frac{1}{1+t}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}t^2 \log(1+t) - \frac{3}{2}\int \frac{t^2-1}{1+t} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+t}\, dt = \\
&= \frac{3}{2}t^2 \log(1+t) - \frac{3}{2}\int t-1\, dt - \frac{3}{2}\log(1+t) = \\
&= \frac{3}{2}\log(1+t)(t^2-1) - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + C, \; C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo effettuato un'integrazione per parti [2] prendendo:

$$F'(t) = 3t, \quad \text{quindi} \quad F(t) = \frac{3}{2}t^2, \quad \text{e} \quad G(t) = \log(1+t) \quad \text{quindi} \quad G'(t) = \frac{1}{1+t}$$

Tenuto conto delle posizioni fatte:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx &= \lim_{a\to 0+}\left[\frac{3}{2}\log(1+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2}-1) - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + C\right]_a^1 = \\
&= \lim_{a\to 0+}\left\{\frac{3}{2}\log 2 \cdot (\sqrt[3]{1}-1) - \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 + C + \right. \\
&- \left. \frac{3}{2}\log(1+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2}-1) - \frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} - C\right\} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(4) Stabilire se la serie seguente risulta *convergente* oppure *divergente*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{2n} - (4n)^n\right].$$

[1] È anche integrabile *secondo Riemann* in quanto si può prolungare con continuità a $[0,1]$ ponendo $f(0)=1$.

[2] Formula di integrazione per parti: $\int F'(t)\, G(t)\, dt = F(t)\, G(t) - \int F(t)\, G'(t)\, dt$.

Svolgimento. Consideriamo il *termine generale* della serie data:

$$a_n = \left[n^{2n} - (4n)^n\right]$$

verifichiamo se soddisafa la *condizione necessaria* per la convergenza della serie:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left[n^{2n} - (4n)^n\right] &= \lim_{n\to+\infty} n^{2n}\left[1 - \frac{(4n)^n}{n^{2n}}\right] = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{2n}\left[1 - \left(\frac{4\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\right)^n\right] = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{2n}\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{n}{4}\right)^n}\right] = +\infty \cdot 1 = +\infty.\end{aligned}$$

$\left(\text{Infatti } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{4}\right)^n = +\infty, \text{ perchè } \left(\frac{n}{4}\right)^n > 2^n, \text{ per } n > 8\right).$

Riassumendo:

- la serie è a termini positivi $\forall n \geq 5$ perchè si verifica facilmente che $n^{2n} \geq (4n)^n$ $\forall n \geq 5$. Infatti $n^{2n} > (4n)^n \iff n^{2\cancel{n}} > (4n)^{\cancel{n}} \iff n^{\cancel{2}} > 4\,\cancel{n}, \forall n \geq 5$.
- il termine generale della serie non converge a zero.

Queste osservazioni ci permettono di concludere che la serie è **divergente**.