ANALISI MATEMATICA

(CORSO D - CdL INFORMATICA)

Prova scritta del 15/1/2004

(1) Calcolare, mediante la formula di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x) - 1 + x^2}{x^2 - \log(1+x^2)}.$$

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}$$

a) Determinarne il dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
b) Determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
c) Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il valore dell'intergrale seguente:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} e^{-\sqrt{3x-1}}\ dt.$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{10}}{10^n}.$$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI.
(1) Calcolare, mediante la formula di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x) - 1 + x^2}{x^2 - \log(1+x^2)}.$$

Svolgimento
Consideriamo gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni elementari che compaiono nel limite:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$$

ponendo $t = \sqrt{2}x$, si ottiene:

$$\cos\sqrt{2}x = 1 - \frac{2x^2}{2} + \frac{4x^4}{24} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

poniamo in questo caso $t = x^2$:

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Sostituendo nel limite le espressioni trovate:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - 1 + x^2}{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6}}{\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO (2). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}$$

a) Determinarne il dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
b) Determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
c) Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.
Determiniamo il dominio di f. La funzione data è composta dalla radice quadrata di un polinomio, risulta definita per i valori della variabile x per i quali il polinomio è non negativo, cioè:

$$x^3 - 12x \geq 0 \iff x(x^2 - 12) \geq 0$$

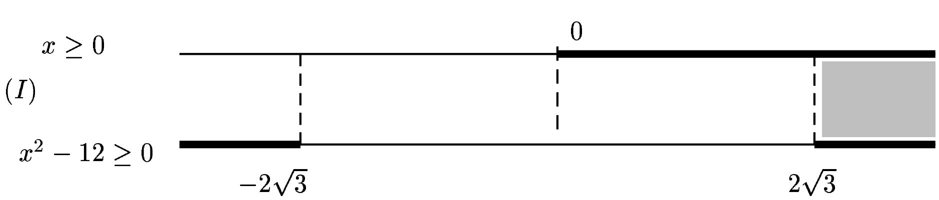
Le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(I)\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad (II)\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 12 \leq 0 \end{cases}$$

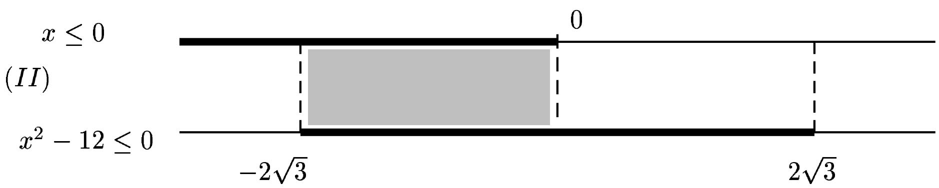
Da cui:

$$(I)\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2\sqrt{3} \text{ oppure } x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \cup \quad (II)\begin{cases} x \leq 0 \\ -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Rappresentiamo su di un grafico le soluzioni delle disequazioni del sistema (I):



Rappresentiamo su di un grafico le soluzioni delle disequazioni del sistema (II):



Il sistema (I) ha soluzioni $\{x : x \geq 2\sqrt{3}\}$, il sistema (II) ha soluzioni $\{x : -2\sqrt{3} \leq x \leq 0\}$.
Il dominio della funzione è:

$$\mathrm{Dom}f = \{x : -2\sqrt{3} \leq x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad 2\sqrt{3} \leq x\}$$

Studiamo l'andamento della derivata prima di f.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{2\sqrt{x^3 - 12x}}$$

Gli zeri di f' si trovano risolvendo l'equazione: $3x^2 - 12 = 0$. Le radici sono $x_{1,2} = \pm 2$. Quindi il segno della derivata prima è:

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 2 \quad \text{oppure} \quad x < -2 f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 2.$$

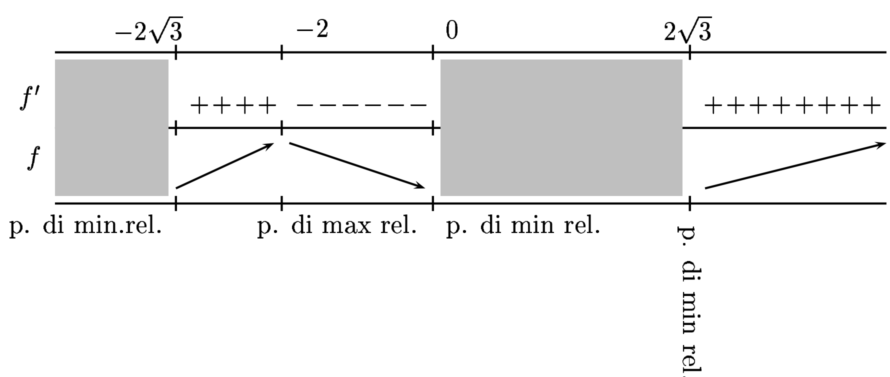
Da cui deduciamo che la funzione risulta strettamente crescente nei seguenti intervalli:

$$\{x : -2\sqrt{3} < x < -2\} \quad \text{oppure} \quad \{x : 2\sqrt{3} < x\}$$

f è invece decrescente su:

$$\{x : -2 < x < 0\}$$

Questi risultati ci permettono di stabilire che :
$x = -2$ è un punto di minimo relativo;
$x = -2\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo;
$x = 0$ è un punto di minimo relativo;
$x = 2\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.
Possiamo riassumere quanto ottenuto nel seguente diagramma:



Studiamo l'andamento della derivata seconda di f.

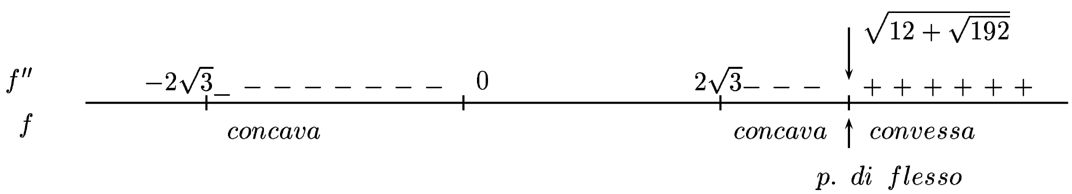
$$f''(x) = \frac{1}{2}\ \frac{6x\sqrt{x^3-12x} - (3x^2-12)\ \frac{3x^2-12}{2\sqrt{x^3-12x}}}{x^3-12x} = \frac{1}{4}\ \frac{3x^4-72x^2-144}{\sqrt{x^3-12x}\ (x^3-12x)}$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal segno del numeratore della frazione (il denominatore è sempre positivo nel dominio di f). Si tratta perciò di risolvere la disequazione: $3x^4-72x^2-144>0$. A tale scopo poniamo $y=x^2$, e risolviamo $3y^2-72y-144>0$. Le radici dell'equazione associata sono: $y_{1,2} = 12\pm\sqrt{192}$, la disequazione considerata viene risolta per valori di y esterni all'intervallo: $[12-\sqrt{192}, 12+\sqrt{192}]$. Tenuto conto del fatto che $y \geq 0$, essendo $y=x^2$, si ha che: $12+\sqrt{192} < x^2$ oppure $x^2 < 12-\sqrt{192}$. Quest'ultima disequazione non ammette soluzioni. Cosideriamo quindi: $12+\sqrt{192} < x^2$, questa ammette soluzioni esterne all'intervallo: $[-(\sqrt{12+\sqrt{192}}), \sqrt{12+\sqrt{192}})]$. Le soluzioni $x < -\sqrt{12+\sqrt{192}}$ si scartano perchè non appartengono al dominio di f. Per cui $3x^4-72x^2-144>0$ per $x > \sqrt{12+\sqrt{192}}$, su questo intervallo f risulta convessa. Consideriamo ora la disequazione $3x^4-72x^2-144<0$, ragionando in modo analogo a quello sopra otteniamo che le soluzioni sono:

$$-2\sqrt{3} < x < 0, \quad \text{oppure} \quad 2\sqrt{3} < x < \sqrt{12+\sqrt{192}};$$

su questi intervalli f risulta concava.

In particolare $x=\sqrt{12+\sqrt{192}}$ è un punto di flesso per f.



Vediamo ora se la funzione ammette asintoti obliqui per $x \to +\infty$, (per $x \to -\infty$ la funzione non ammette asintoti perchè non è definita in un intorno di $-\infty$.)

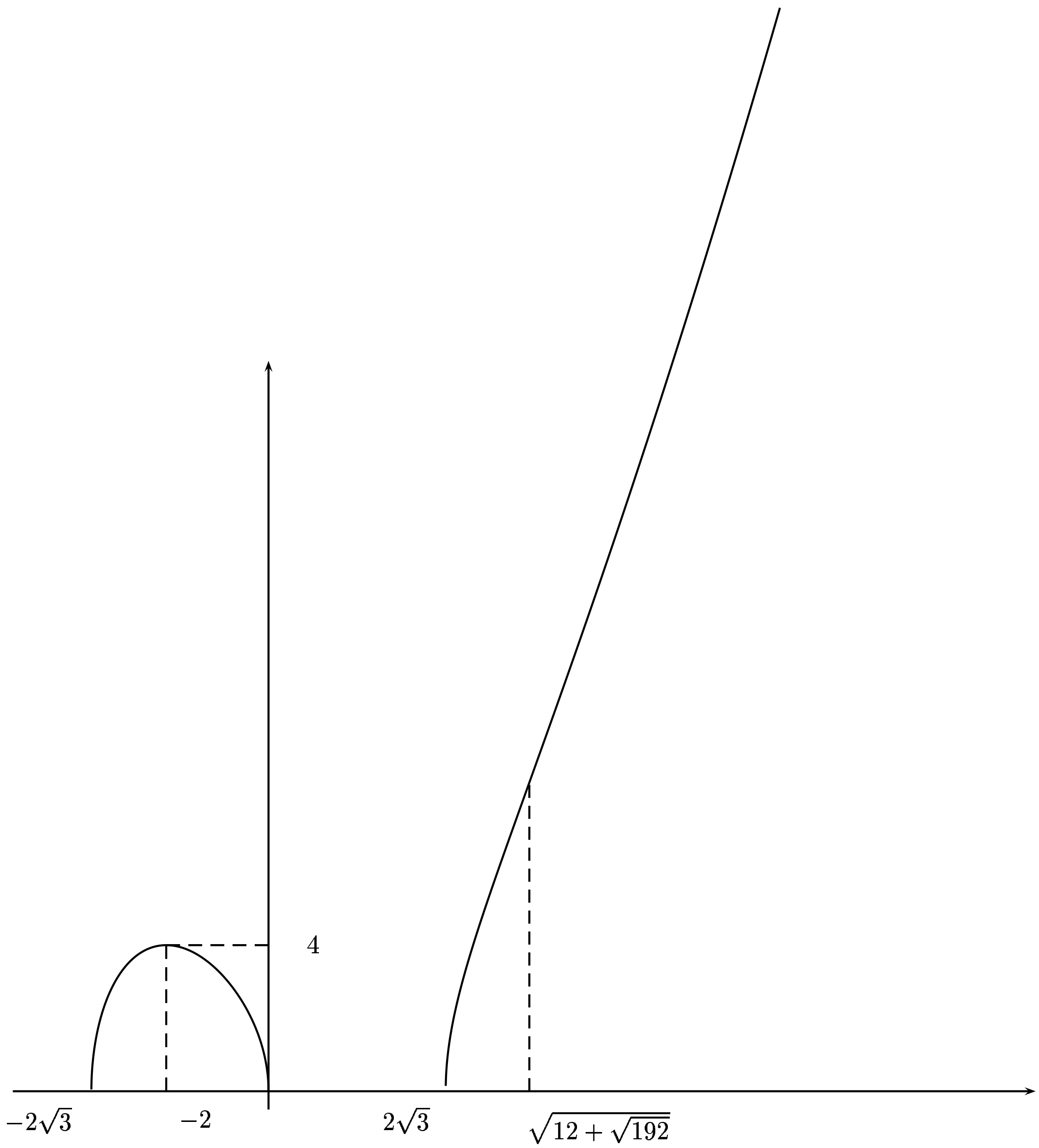
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3-12x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2} - \frac{12}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x - \frac{12}{x}} = +\infty.$$

La funzione non ammette asintoti. Riportiamo nella tabella seguente il valore della funzione in alcuni punti notevoli:

x	$f(x)$
$-2\sqrt{3}$	0
-2	4
0	0
$2\sqrt{3}$	0
$\sqrt{12+\sqrt{192}}$	8.39

Siamo ora in grado di tracciare un grafico di f.

Grafico della funzione



(3) Calcolare il valore dell'intergrale seguente:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} e^{-\sqrt{3x-1}}\ dt.$$

Svolgimento.
Determiniamo l'insieme delle primitive:

$$\int e^{-\sqrt{3x-1}}\ dx, \tag{1}$$

a tale scopo operiamo il cambiamento di variabile: $t = \sqrt{3x-1}$, quindi $t^2 = 3x - 1$ da cui: $x = \frac{t^2+1}{3}$ e $dx = \frac{2}{3}tdt$.

L'integrale indefinito (1) diventa:

$$\frac{2}{3} \int t\, e^{-t}\ dt \tag{2}$$

Risolviamo l'integrale (2) mediante la formula di integrazione per parti:

$$\int f'(t)\ g(t)\ dt = f(t)\, g(t)\ -\ \int f(t)\, g'(t)\ \ dt$$

ponendo $f'(t) = e^{-t}$ e $g(t) = t$, quindi $f(t) = -e^{-t}$. Sostituiamo nell'integrale (2):

$$\frac{2}{3} \int t\, e^{-t}\ dt = -\frac{2}{3}\, t\, e^{-t} + \frac{2}{3} \int e^{-t}\ dt = -\frac{2}{3}\, t\, e^{-t} - \frac{2}{3}\, e^{-t} + C.$$

Tenuto conto della posizione fatta, sostituendo si ottiene:

$$\int e^{-\sqrt{3x-1}}\ dt = -\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}\, e^{-\sqrt{3x-1}} - \frac{2}{3}\, e^{-\sqrt{3x-1}} + C$$

Completiamo l'esercizio applicando la formula per il calcolo degli integrali impropri:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} e^{-\sqrt{3x-1}}\ dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{\frac{1}{3}}^{a} e^{-\sqrt{3x-1}} = \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-1}+1\right) e^{-\sqrt{3x-1}}\right]_{\frac{1}{3}}^{a} =$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{a\to+\infty} \left[\left(\sqrt{3a-1}+1\right) e^{3a-1} - \left(\sqrt{3\ \frac{1}{3} - 1} + 1\right) e^{-\sqrt{3\frac{1}{3}-1}}\right] =$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{a\to+\infty} \left\{\left(\sqrt{3a-1}+1\right)\ e^{-\sqrt{3a-1}} - 1\right\} =$$

(effettuiamo nel limite il seguente cambiamento di variabile:$y = \sqrt{3a-1}$, per $a \to +\infty$ si ha $y \to +\infty$)

$$= -\frac{2}{3} \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y+1}{e^y} - 1\right) = \frac{2}{3}$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{10}}{10^n}.$$

Svolgimento La serie è a termini positivi. Applichiamo uno dei criteri di convergenza per le serie, ad esempio il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{10^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{10^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}}{10} = \frac{1}{10}$$

(perchè $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

Dal criterio della radice ennesima, essendo il valore del limite minore di uno otteniamo la convergenza della serie.