ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 14/1/2005 - FILA 1

Esercizio 1.(punti 8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \ = \ \frac{1 - \sin x}{\sqrt{\cos x}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Esercizio 3.(punti 8) Calcolare:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)} \ dx.$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1} x^n.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 14/1/2005 - FILA 2

Esercizio 1.(punti 8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 9y = \sin 3x.$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \ = \ \frac{1 - \cos x}{\sqrt{\sin x}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Esercizio 3.(punti 8) Calcolare:

$$\int_1^{+\infty} \ \frac{1 + 2x}{(x^2 + 4)x^2} \ dx.$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^4 + 4} x^n.$$

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea. Determiniamo le radici del polinomio caratteristico risolvendo l'equazione

$$\lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda^2 = -4 \iff \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è in campo complesso è dato dall'espressione

$$y(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix}, \ A, B \in \mathbb{C},$$

da cui deduciamo quella in campo reale

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, \ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea che riscriviamo nella forma complessa

$$z'' + 4z = e^{2ix}$$

Poichè $2i$ è una radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione del tipo

$$Axe^{2ix}.$$

Sostituendo nell'equazione si trova che deve essere

$$4iA = 1 \Longrightarrow A = -\frac{i}{4}.$$

Prendendo la parte reale della soluzione cosí dedotta, si ottiene

$$\overline{y}(x) = \frac{x}{4}\sin 2x$$

In definitiva l'insieme delle soluzione dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x, \ A, B \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Tra queste cerchiamo la funzione y_i che verifica le condizioni iniziali date.

$$y(0) = 0 \iff A\cos 0 + B\sin 0 + \frac{0}{4}\sin 0 = 0 \iff A \cdot 1 = 0 \iff A = 0.$$

Nello stesso modo, osservato che

$$y'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos x$$

si ha

$$y'(0) = 1 \iff 2B = 1 \iff B = \frac{1}{2}$$

Sostituendo i valori di A e B così ottenuti nell'espressione 1 si ha infine:

$$y_i(x) = \frac{1}{4}\ (x+2)\ \sin 2x.$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \;=\; \frac{1-\sin x}{\sqrt{\cos x}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Soluzioni

Il campo di esistenza di f si trova risovendo la disequazione

$$\cos x > 0$$

che è verificata per i valori di x appartenenti all'insieme dato da

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

La funzione risulta sempre positiva perchè $1 - \sin x \geq 0$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Invece

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \frac{0}{0}$$

Applichiamo quindi il teorema dell'Hospital

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{-\cos x}{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}} = = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{2\cos x\sqrt{\cos x}}{2\sin x} = 0$$

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \sin x - 2}{2(\cos x)^3 2}$$

Il segno di f' è determinato dal segno del numeratore $\sin^2 x + \sin x - 2 \leq 0$. Poniamo $y = \sin x$ e risolviamo la disequazione

$$y^2 + y - 2 \leq 0 \iff -2 \leq y \leq 1$$

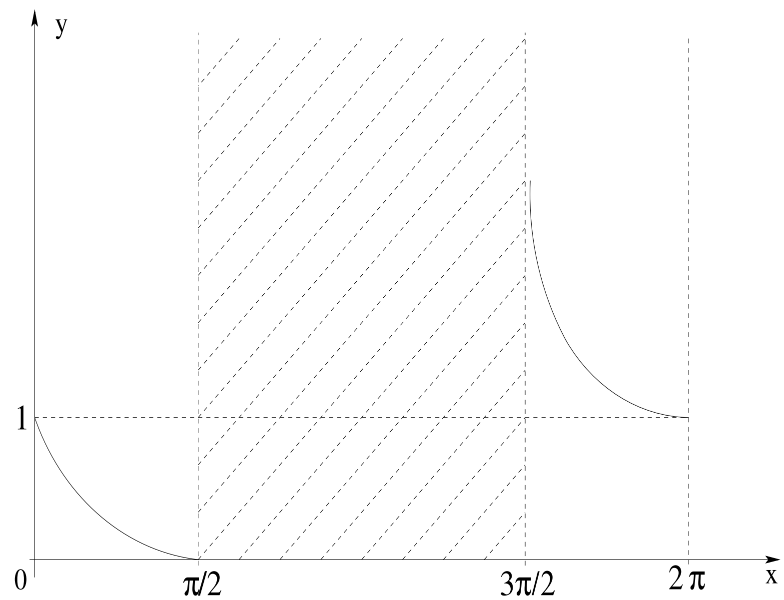
Sostituendo: $-2 \leq \sin x \leq 1$, che è sempre verificata. In conclusione $f'(x) \leq 0$. Calcoliamo f''.

$$f''(x) = \frac{(1-\sin x)(\sin^2 x + 2)}{4(\cos x)^{\frac{5}{2}}}$$

Il numeratore è sempre positivo quindi la funzione è convessa. Infine, osservato che (si utilizza ad esempio il teorema dell'Hospital)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f'(x) = 0,$$

abbiamo gli elementi sufficienti per tracciare il grafico della funzione.



Esercizio 3.(punti 8)

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\ dx.$$

Soluzione. Il primo passo nella risoluzione dell'esercizio consiste nel calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\ dx. \tag{2}$$

La funzione integranda è una funzione razionale. Applichiamo quindi il metodo di integrazione relativo a questo tipo di funzioni. Osserviamo che il grado del polinomio al numeratore è inferiore al grado del polinomio al denominatore. Possiamo allora applicare il *metodo di Hermitte*. Determiniamo le costanti A, B, C, D tali che

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}$$

da cui

$$\frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{2x+1}{1+x^2}$$

ovvero

$$\frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{2x+1}{1+x^2}$$

Le costanti si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \\ A &= 2 \\ B &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 2 \\ B &= 1 \\ C &= -2 \\ D &= -1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'integrale indefinito 2

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\, dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \\ &= 2\log|x| - \frac{1}{x} - \log(1+x^2) - \arctan x + C = \\ &= \log\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \frac{1}{x} - \arctan x + C \end{aligned}$$

Tornando all'integrale di partenza

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\, dx &= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\, dx = \\ &= \lim_{a\to+\infty} \log\left(\frac{a^2}{1+a^2} \right) - \frac{1}{a} - \arctan a + \log 2 + 1 + \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \log 2 + 1 = -\frac{\pi}{4} + \log 2 + 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1} x^n.$$

Soluzione. Studiamo la convergenza assoluta della serie considerando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1} |x|^n.$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+n+1}{n^3+1}}\ |x| = |x|$$

Perchè

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n^2+n+1}{n^3+1} < 1 \tag{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Dunque dal *criterio della radice ennesima* si ha che la serie data *converge assolutamente* e quindi *converge* per $|x| < 1$. Se $x > 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1} x^n = +\infty$$

non è verificata la condizione necessaria per la convergenza di una serie (il termine generale deve essere infinitesimo). Quindi essendo a termini positivi *la serie diverge.* Sia $x = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}.$$

Dalla maggiorazione 3 otteniamo che la serie diverge perchè la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Sia $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}(-1)^n.$$

È una serie a termini di segno alterno. Si verifica facilmente che

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$$

è decrescente ed infinitesima. Dal *criterio di Leibnitz* segue che la serie converge.

Sia $x < -1$. Il termine generale non è infinitesimo. Infatti non esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1} x^n.$$

Dunque avendo i termini a segno alterno la serie risulta *indeterminata.*

Esercizio 1.(punti 8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 9y = \sin 3x.$$

Successivamente trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Soluzione Si procede come nella risoluzione dell'Esercizio 1 della Fila 1. Soluzioni del polinomio caratteristico: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Soluzioni dell'equazione completa:

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x - \frac{x}{6}\cos 3x, \ \ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Soluzione che verifica le condizioni iniziali:

$$y_i(x) = \cos 3x + \frac{1}{18} - \frac{x}{6}\cos 3x.$$

Esercizio 2. (punti 11) Studiare le principali proprietà della funzione:

$$f(x) \;=\; \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

e tracciarne un grafico approssimato.

Soluzioni

Il campo di esistenza di f si trova risovendo la disequazione

$$\sin x > 0$$

che è verificata per i valori di x appartenenti all'insieme dato da $0 < x < \pi$.
La funzione risulta sempre positiva perchè $1 - \cos \geq 0$.
Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\sqrt{x+o(x)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{o(x)}{x}}} = 0$$

Invece

$$\lim_{x\to \pi-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{-\cos^2 x - \cos x + 2}{2(\sin x)^{\frac{3}{2}}}$$

Il segno di f' è determinato dal segno del numeratore $-\cos^2 x - \cos x + 2 \geq 0$. Poniamo $y = \cos x$ e risolviamo la disequazione

$$-y^2 - y + 2 \geq 0 \iff -1 \leq y \leq 2$$

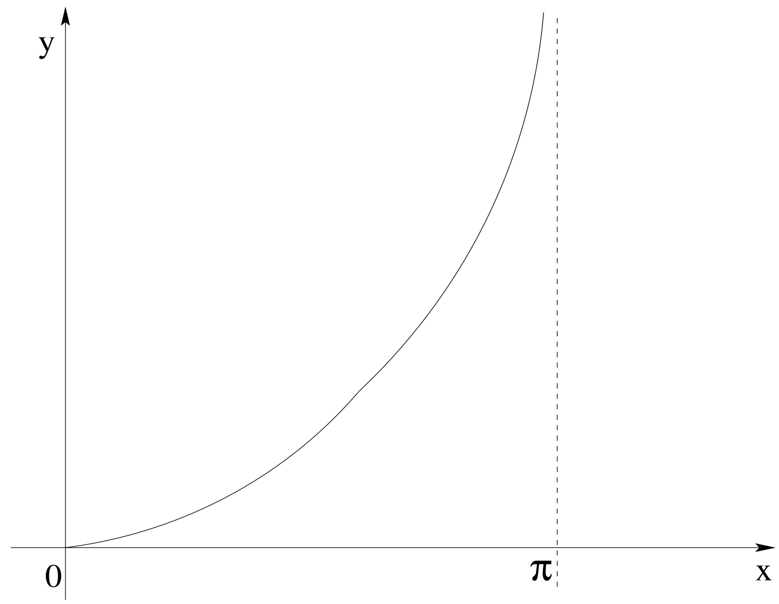
Sostituendo: $-1 \leq \cos x \leq 2$, che è sempre verificata. In conclusione $f'(x) \geq 0$. Calcoliamo f''.

$$f''(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + 2)}{4(\sin x)^{\frac{5}{2}}}$$

Essendo $\cos x - 1 \geq 0, \forall x$, il numeratore è sempre positivo quindi la funzione è convessa.
Infine, osserviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} &\frac{(x+o(x^2))^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + 1}{2(x+o(x))\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{o(x)}{x}}} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0\end{aligned}$$

abbiamo gli elementi sufficienti per tracciare il grafico della funzione.



Esercizio 3.(punti 8) Calcolare:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{(x^2+4)x^2}\ dx.$$

Soluzione. Si procede cole nella risoluzione dell'Esercizio 3 della Fila 1.

Determiniamo le costanti A, B, C, D tali che

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{4+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(4+x^2)}$$

da cui

$$\frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} = \frac{2x+1}{4+x^2}$$

ovvero

$$\frac{Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+4)} = \frac{2x+4}{1+x^2}$$

Le costanti si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \\ 4A &= 2 \\ 4B &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{1}{4} \\ C &= -\frac{1}{2} \\ D &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sostituendo e calcolando gli integrali ottenuti

$$\int \frac{1+2x}{(x^2+4)x^2}\ dx \ = \ -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\arctan\frac{x}{2} + \log\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[n]{x^2+4}}$$

Infine passando al limite

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{(x^2+4)x^2}\ dx \ = \ -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\arctan\frac{1}{2} + \log\sqrt[4]{5}.$$

Esercizio 4.(punti 6) Studiare al variare del parametro x la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^4+4} x^n.$$

Soluzione. Si procede come nella risoluziione dell'Esercizio 4 della Fila 1, basta tenere conto della disequaglianza

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n^3+2}{n^4+4}, \quad n \geq 2.$$

La serie *converge assolutamente* (e quindi *converge*) per $|x| < 1$.
Diverge per $x \geq 1$.
Converge per $x = -1$.
Indeterminata per $x < -1$.