ANALISI MATEMATICA - CORSO D

PROVA SCRITTA DEL 5/11/03

SVOLGIMENTO DI ALCUNI ESERCIZI

1) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^3 - 1} \,-\, 3\right)$$

a) Determinare il dominio di f.
b) Dimostrare che f è strettamente crescente.
c) Determinare l'immagine di f.

2) Determinare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tale che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^3+1} \,+\, n} \,=\, L$$

3) fila 1 Dimostare la convergenza della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n}.$$

3) fila 2 Dimostare la convergenza della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{5n^3+4}{n^3+1} =$$

4) Dimostrare, mediante il Principio di Induzione, la seguente diseguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{n} 3^{2i} \leq n\,\left(3^{2n+1} \,+ 1\,\right).$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

Esercizio N. 1

a) Osserviamo che f è una funzione composta dalle funzioni logaritmo e radice quadrata. La prima è definita quando il suo argomento è strettamente positivo, la seconda se il suo argomento è non negativo. Nel nostro caso abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \sqrt{x^3-1} - 3 > 0 \\ x^3 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Questo sistema equivale al seguente:

$$\begin{cases} x^3 - 1 > 9 \\ x^3 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Da cui otteniamo il dominio della funzione:

$$Dom\, f = \{x : x > \sqrt[3]{10}\}.$$

b) Verifichiamo che:

$$x_1 < x_2 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_1) < f(x_2),\, \forall x_1, x_2 \in Dom\, f.$$

Ovvero:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log\left(\sqrt{x_1^3 - 1} - 3\right) < \log\left(\sqrt{x_2^3 - 1} - 3\right),\; \forall x_1, x_2 \in Dom\, f.$$

Ricordiamo la proprietà di monotonia della funzione logaritmo:

$$(*) \qquad y_1 < y_2 \iff \log y_1 < \log y_2.$$

Partiamo dalla diseguaglianza:

$$\log\left(\sqrt{x_1^3 - 1} - 3\right) < \log\left(\sqrt{x_2^3 - 1} - 3\right)$$

Per (*) equivale alla seguente:

$$\sqrt{x_1^3 - 1} - 3 < \sqrt{x_2^3 - 1} - 3 \iff (**)\sqrt{x_1^3 - 1} < \sqrt{x_2^3 - 1}$$

Ricordiamo che anche per la funzione $x \to \sqrt{x}$ vale l'equivalenza :$y_1 < y_2 \iff \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$. Tenuto conto di questa, la diseguaglianza (**) equivale alla seguente:

$$x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \iff x_1^3 < x_2^3 \iff x_1 < x_2.$$

L'ultimo passaggio è conseguenza della stretta monotonia della funzione: $x \to x^3$.

c) Determinare l'immagine di f equivale a determinare per quali valori di y l'equazione:

$$(\clubsuit) \qquad \log\left(\sqrt{x^3 - 1} - 3\right) = y$$

ammette soluzioni reali. L'equazione (♣) equivale alla seguente:

$$\sqrt{x^3-1}\,-3=e^y \iff \sqrt{x^3-1}=e^y+3 \iff x=\sqrt[3]{1+(e^y+3)^2}.$$

Dunque per ogni $y\in\mathbb{R}$ l'equazione (♣) ammette soluzione, per cui l'immagine di f è costituita da $\mathbb{R}$.

2)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^3+1}\,+n}==\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\,+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\,+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-\frac{3}{2}}=L$$

se l'esponente di n risulta nullo. Quindi: $\alpha=\frac{3}{2}$. In tal caso si ha $L=1$.

3)(fila 1) La serie data è a termini positivi. Applichiamo uno dei criteri di convergenza per questo tipo di serie, ad esempio il criterio del confronto. Maggioriamo il termine generale nel modo che segue:

$$\exists\nu\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall n>\nu:\ \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n}\le\frac{2}{e^n}=2\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Perché si applica la definizione di limite a:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

e si ottiene, prendendo $\varepsilon=1$:

$$\exists\nu\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall n>\nu:\ \sqrt[n]{n}<1+1$$

Abbiamo quindi maggiorato il termine generale della serie data con il termine gnerale della serie geometrica di ragione $\frac{1}{e}<1$ che converge.

3) fila 2 I termini della serie proposta sono positivi. Applichiamo uno dei criteri relativi a questo tipo di serie, ad esempio il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\frac{5n^3+4}{n^3+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{5n^3+4}{n^3+1}}==\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{n^3\left(5+\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}=$$

$$(*)\qquad=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sqrt[n]{5+\frac{4}{n^3}}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{2}$$

Il limite ottenuto risulta <1, quindi la serie converge.

Osserviamo che nell'ultimo passaggio effettuato sopra abbiamo utilizzato il seguente limite notevole:

se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $0 < m < a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$ allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Infatti in (*) si ha che le successioni poste sotto le radici ennesime sono minorate e maggiorate nel modo che segue:

$$5 < 5 + \frac{4}{n^3} < 9, \quad 1 < 1 + \frac{1}{n^3} < 2, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

perchè : $\frac{1}{n^3} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

4) Applichiamo il principio di induzione alla proposizione:

$$\mathcal{P}(n) : \quad \sum_{i=1}^{n} 3^{2i} \leq n \left(3^{2n+1} + 1\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dobbiamo allora verificare che

i) $\mathcal{P}(1)$ è vera;

ii) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

La verifica di i) è semplice:

$\mathcal{P}(1) : \sum_{i=1}^{1} 3^{2i} \leq 1 \left(3^{2+1} + 1\right) \iff 3^2 \leq 3^3 + 1$ che è vera.

Dimostriamo ii), ossia dimostriamo che se vale $\mathcal{P}(n)$ allora vale:

$$(\star) \quad \sum_{i=1}^{n+1} 3^{2i} \leq (n+1) \left(3^{2(n+1)+1} + 1\right).$$

Esprimiamo la sommatoria dell'eguaglianza $(\star)$ nel modo che segue:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 3^{2i} = \sum_{i=1}^{n} 3^{2i} + 3^{2(n+1)} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva $\mathcal{P}(n)$)

$$(\star\star) \quad \leq n \left(3^{2n+1} + 1\right) + 3^{2(n+1)}$$

Vediamo se l'espressione $(\star\star)$ risulta maggiorata dal termine : $(n+1) \left(3^{2(n+1)+1}\right)$.

Ossia proviamo quanto segue:

$$n \left(3^{2n+1} + 1\right) + 3^{2(n+1)} \leq (n+1) \left(3^{2n+3} + 1\right)$$

questa diseguaglianza equivale alla seguente:

$$3n\, 3^{2n} + n + 3^2\, 3^{2n} \leq 3^3 n\, 3^{2n} + 3^3\, 3^{2n} + n + 1$$

da cui:

$$0 \leq 24n\, 3^{2n} + 18\, 3^{2n} + 1$$

Che risulta verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Anche ii) di conseguenza è verificata.