INTEGRALE IN SENSO IMPROPRIO E INTEGRALE DI LEBESGUE

OSSERVAZIONI ED ESEMPI

Sia $f : [a, +\infty) :\longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio. Se, $\forall x \geq a$, $f(x) \geq 0$ allora f è integrabile secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono.
Infatti consideriamo la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq n, \\ \\ 0, & x > n. \end{cases} \tag{1}$$

Osserviamo che, per ogni $x \geq a$, f_n è int. s. L. su $[a, +\infty)$ perché è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a, n]$ e vale zero per $x > n$. Inoltre per ogni $x \geq a$, per ogni $n \geq a$ si ha $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Dal teorema della convergenza monotona deduciamo che f è int. s. L. e ([1])

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\int_a^{+\infty} f_n(x)\ dx \ = \ \mathcal{L}\int_a^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx \ = \ \mathcal{L}\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

D'altra parte, dalla definizione di integrale in s. imp.:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{R}\int_a^{+\infty} f_n(x)\ dx \ = \ \lim_{n\to+\infty} \mathcal{R}\int_a^{n} f(x)\, dx \ = \ \mathcal{R}\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Da queste, essendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\int_a^{+\infty} f_n(x)\ dx = \mathcal{R}\int_a^{+\infty} f_n(x)\ dx,$$

si ottiene

$$\mathcal{L}\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \mathcal{R}\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Che succede se f non ha segno costante ed è integrabile in senso improprio? Possiamo in questo caso affermare che f è integrabile nel senso di Lebesgue?
Intanto osserviamo che per dare una risposta a questa domanda non possiamo procedere come sopra, perché se consideriamo la successione f_n, definita in (1) non è detto sia monotona. Tuttavia è possibile talvolta utilizzare il teorema della convergenza dominata come si vede dal seguente esempio.

ESEMPIO 1.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{1 + e^x}, \ \ x \geq 0.$$

In questo caso facendo la posizione (1) è possibile sfruttare la maggiorazione

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + e^x} \ = g(x), \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \geq 0,$$

ed osservare che g è positiva ed integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$, quindi integrabile secondo Lebesgue.
Per il teorema della convergenza dominata, essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, segue che f è integrabile secondo Lebesgue su $[0, +\infty)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Non sempre è possibile ottenere una maggiorazione come quella sopra ovvero maggiorare la successione f_n con una funzione *g che sia integrabile secondo Lebesgue.* Il seguente è un esempio di una situazione di questo tipo.

---

[1] Indichiamo con $\mathcal{L}\int_a^{+\infty}$ l'integrale di Lebesgue, e con $\mathcal{R}\int_a^{+\infty}$ l'integrale di Riemann. Nel seguito ometteremo $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ e si dedurrà dal contesto del discorso a quali di questi si fa riferimento.

ESEMPIO 2.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0. \tag{2}$$

Se volessimo stabilire la sua integrabilità nel senso di Lebesgue procedendo come nell'Esempio 1, ovvero considerare la successioni di funzioni f_n, definita da (1), si avrebbe

$$|f_n(x)| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} = g(x), \quad x > 0.$$

Ma g non è integrabile secondo Lebesgue (non è integrabile in senso improprio ed è positiva), quindi il teorema della convergenza dominata non è utilizzabile. A questo punto potrebbe sorgere il dubbio di aver eseguito una maggiorazione troppo grossolana. Forse con un pò più di attenzione avremmo potuto trovare una g, che maggiora la successione f_n, che fosse integrabile secondo Lebesgue? Le seguenti proposizioni permettono di fornire in maniera esauriente una risposta negativa a questa domanda.

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$, è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$;
2. $|f(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, $x > 0$, non è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$;
3. f non è integrabile secondo Lebesgue.

Dimostrazione di 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{3}$$

Il primo integrale al secondo membro di (3) esite finito perché la funzione integranda è continua in $(0, 1]$ ed è limitata in $[0, 1]$. Quindi integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$.
Consideriamo il secondo integrale al secondo membro di (3). Dalla definizione di integrale improprio, integrando per parti, si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left\{ \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^c - \int_0^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx \right\} =$$

$$= \cos 1 - \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ esiste finito perchè la funzione $x \longrightarrow \dfrac{\cos x}{x^2}$ è assolutamente integrabile su $[0, +\infty)$. Infatti

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}, \ \forall x \geq 1.$$

Dimostrazione di 2.

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx =$$

(cambiamento di variabile: $t = x - n\pi$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t + n\pi)|\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} = +\infty$$

Dimostrazione di 3.

Se f fosse integrabile secondo Lebesgue allora anche $|f|$ sarebbe integrabile secondo Lebesgue. Di conseguenza considerando la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, & 0 \leq x \leq n, \\ \\ 0, & x > n, \end{cases} \tag{4}$$

che sono integrabili secondo Lebesgue su $(0, +\infty)$, in quanto continue e limitate su $(0, n]$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = |f(x)|$, per ogni $x > 0$. Si potrebbe quindi applicare il teorema della convergenza dominata perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$

$$0 \leq \phi_n(x) \leq |f(x)|,$$

e dedurre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \phi_n(x)\ dx\ =\ \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \phi_n(x)\ dx\ =\ \int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Ma per quanto dimostrato nel punto 2,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \phi_n(x)\ dx\ =\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} |f(x)|\ dx\ =$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\ dx\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\, dx\ =\ +\infty.$$

Osservazioni sul teorema della convergenza dominata.

Le ipotesi della convergenza dominata sono solo sufficienti. Infatti consideriamo la successione di funzioni definite su $(0, +\infty)$

$$f_n(x)\ =\ \frac{\sin x}{x}\ e^{-\frac{x}{n}}. \tag{5}$$

Ciascuna f_n è integrabile secondo Lebesgue su $(0, +\infty)$ perché, per ogni $x > 0$,

$$|f_n(x)|\ =\ \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ e^{-\frac{x}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}},$$

e funzione $x \to e^{-\frac{x}{n}}$ è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$, quindi, per il teorema del confronto ciascuna f_n è assolutamente integrabile in senso improprio, quindi $|f_n|$ è integrabile secondo Lebegue, il che implica che anche f_n lo sia. D'altra parte si noti che, per ogni $x > 0$,

$$|f_n(x)|\ =\ \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ e^{-\frac{x}{n}} \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|. \tag{6}$$

Ma la funzione $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, come visto in precedenza, non è integrabile secondo Lebesgue. Il teorema della convergenza dominata non è applicabile, ma valgono egualmente le seguenti proposizioni:

1. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ =\ \dfrac{\sin x}{x}\ \forall x > 0,$

2. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx\ =\ \int_0^{+\infty} [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx\ =\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

La prima è evidente, mentre la seconda è vera *ma non come conseguenza del teorema della convergenza dominata*. La dimostreremo infatti calcolando il valore ciascuno dei termini che vi compaiono e verificando che sono uguali. Resta il dubbio che non siamo riusciti per nostra incapacità a determinare una funzione maggiorante la successione f_n, ovvero ci chiediamo se esiste una maggiorazione più fine della (6). La presenza della funzione esponenziale non fa sperare che si possa facilmente determinare una tale stima.

Dimostrazione di 2.

Consideriamo la funzione

$$F(t) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\; dx, \quad t > 0. \tag{7}$$

Calcoliamo la sua derivata mediante il calcolo del limite del suo rapporto incrementale.

$$F'(t) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t+h}}\; dx \;-\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\; dx\right] =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t+h}} \;-\; \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\right)\; dx\right] = \lim_{h\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{e^{-\frac{x}{t+h}} - e^{-\frac{x}{t}}}{h}\right) dx.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale (vedi sotto la giustificazione di questa operazione) si ha

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{x}{t+h}} - e^{-\frac{x}{t}}}{h}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\cancel{x}}\, e^{-\frac{x}{t}}\, \frac{\cancel{x}}{t^2}\, dx.$$

Da cui

$$F'(t) \;=\; \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty} \sin x\; e^{-\frac{x}{t}}\; dx. \tag{8}$$

Il risultato di questa operazione rende evidente il motivo per il quale abbiamo seguito questa strategia. La funzione integranda in (8) ha una primitiva esprimibile maniera semplice, “calcolabile” come vedremo più avanti. La derivazione ha permesso di eliminare la x al denominatore della frazione della funzione integranda nell'espressione di F. E' noto infatti che la funzione $x \to \frac{\sin x}{x}$ appartiene alla categoria delle funzioni per le quali non è possibile esprimere la primitiva in maniera elementare.

Diamo ora una giustificazione del passaggio al limite sotto il segno di integrale eseguito sopra, osservando che per il teorema di Lagrange si ha che per ogni $x > 0$, $t > 0$, $0 < 2|h| < t$ esiste ξ_h, con $0 < |\xi_h| < h$,

$$\left|\frac{e^{-\frac{x}{t+h}} - e^{-\frac{x}{t}}}{h}\right| \le \frac{x}{(t+\xi_h)^2}\, e^{-\frac{x}{t+\xi_h}}$$

e quindi

$$\left|\frac{\sin x}{x}\,\frac{e^{-\frac{x}{t+h}} - e^{-\frac{x}{t}}}{h}\right| = \left|\frac{\sin x}{\cancel{x}}\right| \frac{\cancel{x}}{(t+\xi_h)^2}\, e^{-\frac{x}{t+\xi_h}} \le \frac{4}{t^2}\, e^{-\frac{x}{2t}} \tag{9}$$

Considero una qualunque successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $h_n \to 0$, ed applico il teorema della convergenza dominata alla successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{x}\,\frac{e^{-\frac{x}{t+h_n}} - e^{-\frac{x}{t}}}{h_n},$$

il cui il valore assoluto è maggiorato dalla funzione

$$g(x) \;=\; \frac{4}{t^2}\, e^{-\frac{x}{2t}},$$

che è integrabile secondo Lebesgue in $(0,+\infty)$ (in quanto positiva e integrabile in senso improprio). Il teorema ponte tra limiti di funzione e limiti di successione permette di ottenere la tesi.
Calcoliamo quindi $F'(t)$ considerando:

$$\int_0^a e^{-\frac{x}{t}}\sin x\,dx = \left[(-\cos x)\,e^{-\frac{x}{t}}\right]_0^a - \frac{1}{t}\int_0^a \cos x\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx = \tag{10}$$
$$-\cos a + 1 - \frac{1}{t}\left[\sin x e^{-\frac{x}{t}}\right]_0^a - \frac{1}{t^2}\int_0^a \sin x e^{-\frac{x}{t}}\,dx.$$

Da cui

$$\int_0^a e^{-\frac{x}{t}}\sin x\,dx = \frac{t^2}{1+t^2}\left[\left(-\cos a - \frac{1}{t}\sin a\right)e^{-\frac{a}{t}} + 1\right],$$

dove passando al limite per $a\to+\infty$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}}\sin x\,dx = \frac{t^2}{1+t^2},$$

e quindi, tenuto conto di (8)

$$F'(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}}\sin x\,dx = \frac{1}{1+t^2}.$$

A questo punto risulta evidente che da questa relazione possiamo ricavare facilmente F :

$$F(t)\in\{\arctan t + C,\ C\in\mathbb{R}\}.$$

Osservato che che $\lim\limits_{t\to 0+} F(t) = 0$ in quanto

$$|F(t)|\le\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx\right|\le\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}}\,dx = \left[-t\,e^{-\frac{x}{t}}\right]_0^{+\infty} = t,$$

si deduce che deve essere $C=0$ e quindi $F(t)=\arctan t$, da questo provando che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{11}$$

si ha che risulta

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Dimostrazione di (11).

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx - \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le$$
$$(a>0)$$
$$\le\left|\int_0^a\left[\frac{\sin x}{x}\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx - \frac{\sin x}{x}\right]dx\right| + \left|\int_a^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx - \frac{\sin x}{x}\right]dx\right| + \tag{12}$$

Valutiamo il primo degli integrali al secondo membro di (12)

$$\left|\int_0^a\left[\frac{\sin x}{x}\,e^{-\frac{x}{t}}\,dx - \frac{\sin x}{x}\right]dx\right|\le\int_0^a\left|\frac{\sin x}{x}\right|\left|e^{-\frac{x}{t}} - 1\right|\,dx\le$$
$$\le\int_0^a\left(1 - e^{-\frac{x}{t}}\right)\,dx = \left[x + te^{-\frac{x}{t}}\right]_0^a = a + t\,e^{-\frac{a}{t}} - t.$$

Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \left(a + t\,e^{-\frac{a}{t}} - t\right) = \lim_{t\to+\infty} a + t\left[1 - \frac{a}{t} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right] - t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{a^2}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^a \left[\frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\, dx - \frac{\sin x}{x}\right]\, dx = 0.$$

Consideriamo ora l'ultimo degli integrali di (12)

$$\left|\int_a^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}} - \frac{\sin x}{x}\right]\, dx\right| \leq \left|\int_a^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\right]\, dx\right| + \left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\right|.$$

Osserviamo che, essendo $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$, risulta che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_1 > 0$ tale che per ogni $a > a_1$ si ha

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq \varepsilon \tag{13}$$

D'altra parte per ogni a, b, con $0 < a < b$, e per ogni $t > 1$ risulta, (integrando per parti, vedi anche (10))

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\, dx\right| = \left|\frac{t^2}{1+t^2}\left\{\left[e^{-\frac{x}{t}}\left(\frac{\sin x}{t} - \cos x\right)\frac{1}{x}\right]_a^b + \int_a^b e^{-\frac{x}{t}}\left(\frac{\sin x}{t} - \cos x\right)\frac{1}{x^2}\, dx\right\}\right| \leq$$

$$\leq \left|e^{-\frac{b}{t}}\left(\frac{\sin b}{t} - \cos b\right)\frac{1}{b}\right| + \left|e^{-\frac{a}{t}}\left(\frac{\sin a}{t} - \cos a\right)\frac{1}{a}\right| + \int_a^b e^{-\frac{x}{t}}\left|\frac{\sin x}{t} - \cos x\right|\frac{1}{x^2}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{4}{a} + 2\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx \leq \frac{4}{a} + \frac{2}{3}\frac{1}{a^3}.$$

Da cui segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_2 > 0$ tale che per ogni $a > a_2$ si ha

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}}\, dx\right| \leq \varepsilon$$

Da (13) e (14) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_3 = min(a_1, a_2)$ tale che per ogni $a > a_3$ si ha

$$\left|\int_a^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\, e^{-\frac{x}{t}} - \frac{\sin x}{x}\right]\, dx\right| < 2\varepsilon.$$

Abbiamo così dimostrato (11).