Analisi Matematica II - Corso di Laurea in Fisica

Esercizi sugli integrali impropri.

Dire se esistono finiti i seguenti integrali impropri.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}\ \sin(x^{\frac{3}{2}})}{[\log(1+x)]^2}\ dx.$ **2)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\ \log(1+e^x)\ \log x}{(1-x^2)^2}\ dx.$

Determinare per quali valori del parametro reale α esistono finiti i seguenti integrali impropri.

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\ \log\left(1+\frac{3}{x^\alpha}\right)\ dx.$ **4)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^{2x})^\alpha}\ dx.$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{|\sin x|}{x}\right)^x - 1 + \frac{x^3}{6}\right]\frac{1}{x^\alpha}\ dx.$ **6)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{[\log(1+x)]^2 - \frac{x^2}{1+x}}{x^\alpha}\ dx$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha\ (\log x)^2}{x^x - 1 - x\ \log x}\ dx$ **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^x + x\ \log x}{(\sin \pi x)^\alpha}\ dx$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+2\ \arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x}\ dx$

10) Dato l'integrale improprio

$$I(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^n\ dx$$

a) dimostrare che esiste finito per ogni $n \in \mathbb{N}$,

b) dimostrare che $I(n) = n!$.

Risultati.
1) sì; **2)** no; **3)** $\alpha > 2$; **4)** $\alpha > \frac{1}{2}$; **5)** $2 < \alpha < 6$; **6)** $\alpha < 5$; **7)** $\alpha > 1$; **8)** $\alpha < 3$; **9)** $\alpha > 3$.