Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 14 gennaio 2012

FILA 2

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.
Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) (**Punti 6**). Dimostrare la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2\,k\,3^{k-1} \;+\; 3^k\right) = (3^n - 1)\,(n+1) \;+\; n.$$

(2) (**Punti 15**). Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^3 + 1} \;-\; x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) (**Punti 6**). Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x \;+\; 4\,\cos x \;+\; 17}\;dx$$

(4) (**Punti 6**). Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) - 12\,u(t) \;=\; 0, \\ u(0) \;=\; 0, \\ u'(0) \;=\; 7. \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

(1) Dimostrare la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2\,k\,3^{k-1} \,+\, 3^k\right) = (3^n - 1)\,(n+1) \,+\, n.$$

Svolgimento.
Per $n = 1$ é banalmente verificata perché $2\,3^0 + 3^1 = (3^1 - 1)(1 + 1) + 1$.
Verifichiamo l'induttivitá della proposizione. Ovvero deduciamo dall'identitá (ipotesi induttiva)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2\,k\,3^{k-1} \,+\, 3^k\right) = (3^n - 1)\,(n+1) \,+\, n. \tag{1}$$

la seguente identitá

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(2\,k\,3^{k-1} \,+\, 3^k\right) = \left(3^{n+1} - 1\right)(n+2) \,+\, n+1. \tag{2}$$

Per questo esplicitiamo nella sommatoria sopra al primo membro il termine $(n+1)-$esimo utilizzzando l'ipotesi induttiva (1)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2\,k\,3^{k-1} \,+\, 3^k\right) + 2(n+1)3^n + 3^{n+1} = (3^n - 1)\,(n+1) \,+\, n + 2(n+1)3^n + 3^{n+1} =$$

$$= 3^n(n+1) - n - 1 + n + 2(n+1)3^n + 3^{n+1} = 3\;\; 3^n(n+1) + 3^{n+1} - 1 = 3^{n+1}(n+2) - 1.$$

Il secondo membro di (2) diventa

$$\left(3^{n+1} - 1\right)(n+2) \,+\, n+1 = 3^{n+1}(n+2) - n - 2 + n + 1 = 3^{n+1}(n+2) - 1.$$

L'identitá é quindi verificata.

(2) (**Punti 15**). Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^3+1} \,-\, x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.
Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R}$.
Calcoliamo i limiti della funzione per x che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} \,-\, 1\right) = \pm\infty.$$

Vediamo se esistono asintoti all'infinito.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\pm\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - 1 \right) \frac{1}{x} = \sqrt[3]{3} - 1.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^3+1} - x - [\sqrt[3]{3} - 1]x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^3+1} - \sqrt[3]{3}\,x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3}\,x \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3x^3}} - 1 \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3}\,x \left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1 = 0 \right]$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato lo sviluppo $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, con $t = \frac{1}{3x^3}$ e $\alpha = \frac{1}{3}$.
Quindi la funzione ammette come asintoto per x che tende a $\pm\infty$ la retta di equazione

$$y = [\sqrt[3]{3} - 1]x.$$

Determiniamo ora gli intervalli di monotonia e gli eventuali massimi e minimi relativi calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x^3+1)^2}} - 1.$$

Da cui segue che $f'(x) > 0$ per i valori di x che risolvono la disequazione $3x^2 - \sqrt[3]{(3x^3+1)^2} > 0$. Ossia $18x^6 - 6x^3 - 1 > 0$, dove ponendo $s = x^3$ ci riconduciamo alla disequazione di secondo grado $18s^2 - 6s - 1 > 0$ le cui soluzioni sono

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Dunque $18s^2 - 6s - 1 > 0$ per $s < \frac{1-\sqrt{3}}{6}$ oppure $s > \frac{1+\sqrt{3}}{6}$. Tornando alla posizione fatta sopra in definitiva si ha che $f'(x) > 0$ per $x < \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}}{6}}$ oppure $x > \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{6}}$. f' risulta negativa nell'intervallo delle radici. Da tutto questo, tenuto conto dei teoremi riguardanti la relazione tra segno della derivata prima e monotonia della funzione, possiamo concludere che
f é crescente sugli intervalli
$\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt[3]{3}}{6}}\right)$ e $\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{3}}{6}}, +\infty\right)$,
mentre é decrescente in
$\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}}{6}}, \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{6}}\right)$. Di conseguenza i punti $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}}{6}}$ e $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{6}}$, dove si annulla f' sono, rispettivamente, di massimo e di minimo relativo.
Si osservi che nel punto $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ la funzione derivata non é definita. In particolare si ha che

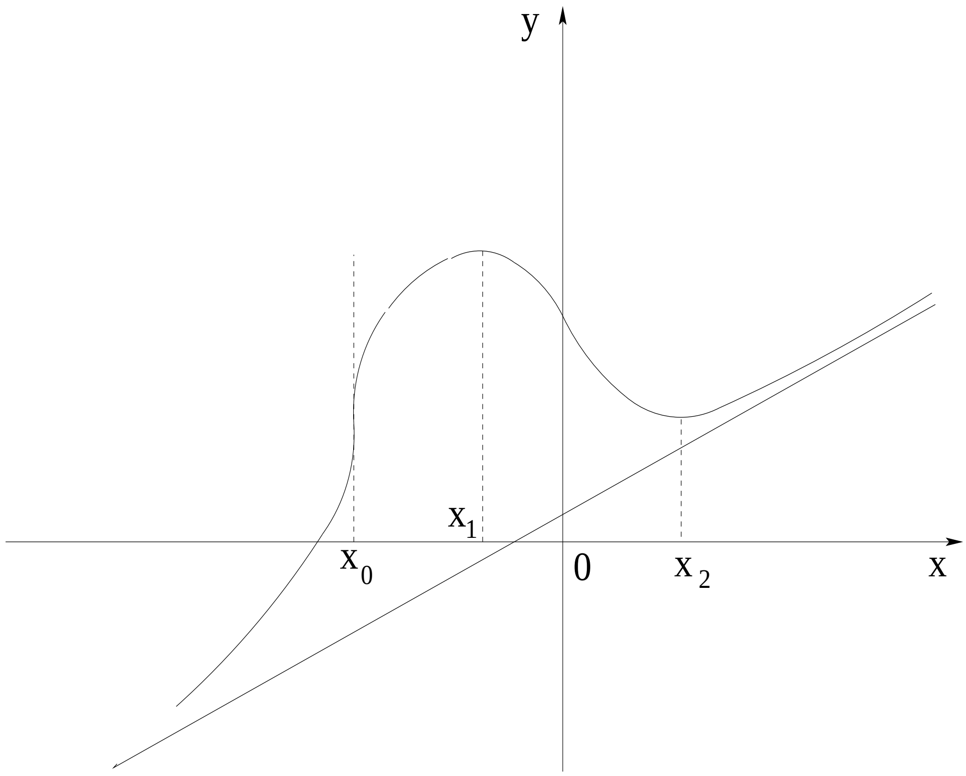
$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} f'(x) = +\infty.$$

Da questo deduciamo che la tangente al grafico di f in $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ é verticale.
Per determinare gli intervalli di convessitá o concavitá di f calcolando f''.

$$f''(x) = \frac{6x}{\sqrt[3]{(3x^3+1)^5}}.$$

Si vede facilmente che $f''(x) > 0$ per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ e per $x > 0$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right)$. Ne segue che f é convessa negli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ e $(0, +\infty)$, concava nell'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right)$. Il

punto $x = 0$, dove si annulla f'', risulta essere di flesso dato che per $x > 0$, $f''(x) > 0$, mentre $f''(x) < 0$ in un suo intorno sinistro.
Tenuto conto di quanto osservato possiamo tracciare il grafico di f.



(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x \,+\, 4\,\cos x \,+\, 17}\ dx$$

Svolgimento.
Effettuiamo il cambiamento di variabile $t = \cos x$, quindi $dt = -\sin x\ dx$, da cui sotituendo nell'intergale

$$\int \frac{-1}{t^2 \,+\, 4\,t \,+\, 17}\ dt.$$

Ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale. Le radici del denominatore sono $t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{13}\,i$.
Possiamo quindi scrivere

$$t^2 + 4t + 17 = [t - (-2 + \sqrt{13}i)][t - (-2 - \sqrt{13}i)] = [t + 2 + \sqrt{13}i][t + 2 - \sqrt{13}i] = [(t+2)^2 + 13].$$

Da cui

$$\int \frac{-1}{t^2 \,+\, 4\,t \,+\, 17}\ dt = \int \frac{-1}{13 + (t+2)^2}\ dt \ = \ \frac{-\sqrt{13}}{13} \int \frac{1}{\sqrt{13}} \frac{1}{1 + \left(\frac{t+2}{\sqrt{13}}\right)^2}\ dt.$$

Effettuiamo un ulteriore cambio di variabile ponendo

$$s = \frac{t+2}{\sqrt{13}}, \quad ds = \frac{1}{\sqrt{13}}\, dt.$$

L'integrale da calcolare diventa

$$\frac{-\sqrt{13}}{13} \int \frac{1}{1+s^2}\, ds \;=\; \frac{-\sqrt{13}}{13} \arctan s + C.$$

Tenuto conto della posizioni fatte in precedenza si ha

$$\left[\frac{-\sqrt{13}}{13} \arctan s + C\right]_{s=\frac{t+2}{\sqrt{13}}} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{13}} \arctan \frac{t+2}{\sqrt{13}} + C.$$

Tenuto conto della sostituzione di partenza si ha infine

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x \, + 4 \, \cos x \, + \, 17}\; dx \;=\; \frac{-1}{\sqrt{13}} \arctan \frac{\cos x + 2}{\sqrt{13}} + C.$$

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) - 12\, u(t) \;\;=\;\; 0, \\ \\ u(0) \;=\; 0, \\ \\ u'(0) \;=\; 7. \end{cases}$$

Svolgimento.
Calcoliamo una base delle soluzioni dell'equazione omogenea ediante il metodo del polinomio caratteristico.

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0.$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$. Lo spazio vettoriale V_0 delle soluzioni dell'equazione omogenea é dato da

$$V_0 = \{C_1\, e^{-4t} + C_2\, e^{3t},\; \mathbb{C}_1,\; C_2 \in \mathbb{C}\}$$

Osservato che

$$u'(t) = -4\, C_1\, e^{-4t} + 3\, C_2\, e^{3t},$$

imponiamo la verifica delle condizioni iniziali per calcolare C_1, C_2 ed otteniamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \\ -4C_1 + 3C_2 = 7. \end{cases}$$

Da questo ricaviamo $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Quindi la soluzione del Problema di Cauchy assegnato é la funzione

$$u(t) = -\, e^{-4t} \,+\, e^{3t}.$$