8.1

Basta applicare la formula di passaggio da un sistema di misura all'altro.

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{3}{2}\pi$; c) 2π; d) $\frac{\pi}{180}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{3}{4}\pi$; g) $\frac{5}{4}\pi$; h) $\frac{\pi}{12}$; i) $\frac{105}{1800}\pi$; j) $\frac{130025}{1800000}\pi$;

k) $\frac{145025}{1800000}\pi$; l) $22^0 30'$; m) 360^0; n) 270^0; o) 120^0; p) $57^0 17' 45'$; q) 15^0; r) $67^0 30'$; s) 330^0;

t) 252^0; u) $82^0 30'$; v) $54^0 27'$.

8.2

a) terzo; b) primo; c) terzo; d) secondo ; e) secondo ; f) primo; g) secondo; h) quarto;

i) quarto; j) terzo; k) secondo; l) terzo; m) primo; n) primo.

8.3

Ricordare che una funzione $f(x)$ è *periodica di periodo* $T > 0$ se T è il più piccolo numero positivo tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni x nel dominio della funzione.

(a) Il periodo è 2π; infatti

$$\cos(x + 2\pi - 2) = \cos(x - 2).$$

(b) Il periodo $\frac{2}{3}\pi$; infatti

$$\sin\left[3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\pi}{8}\right] = \sin\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right).$$

(c) Il periodo è 8; infatti

$$5\cos\left[\frac{\pi}{4}(x+8) - 2\right] = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\,x + 2\pi - 2\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\,x - 2\right).$$

(d) Il periodo è $\frac{\pi}{6}$; infatti

$$2\tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\tan 3x.$$

(e) Il periodo è 6π; infatti la prima funzione ha periodo 2π, la seconda 6π, e 6π è il più piccolo multiplo intero positivo dei due periodi.
(f) Il periodo è 12π; infatti la prima funzione ha periodo 4π, la seconda 6π.
(g) Il periodo è 2π; infatti la prima funzione ha periodo $\frac{2}{3}\pi$; la seconda $\frac{2}{5}\pi$
(h) Il periodo è π; infatti la prima funzione ha periodo ha periodo π, la seconda $\frac{\pi}{4}$.
(i) La funzione non è periodica; infatti la prima ha periodo 2π la seconda ha periodo 2 e non esiste alcun multiplo intero di 2π che sia uguale ad un multiplo intero di 2.

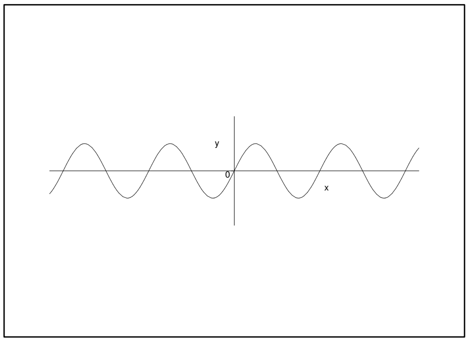
8.4

Negli esercizi da (g) fino a (l) si usi l'identità

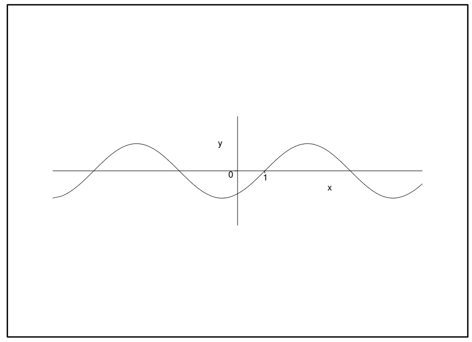
$$a\sin x \;+\; b\cos x \;=\; \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

con $\varphi \in \mathbb{R}$ da calcolare opportunamente (vedi Esercizio 16 del Capitolo 8).

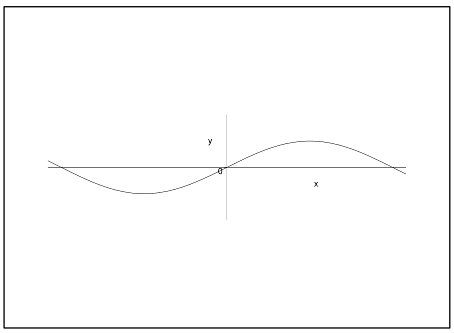
ESERCIZIO **?? a)** $x \longrightarrow \quad sin 2x$



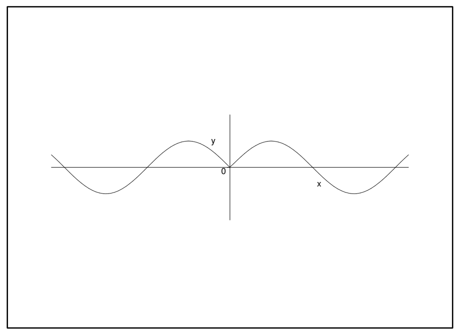
ESERCIZIO **?? b)** $x \longrightarrow \quad sin(x-1)$



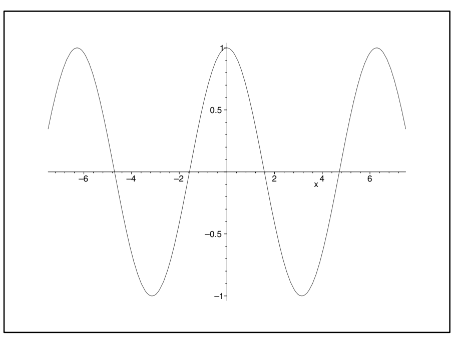
ESERCIZIO **?? c)** $x \longrightarrow \ \sin\dfrac{x}{2}$



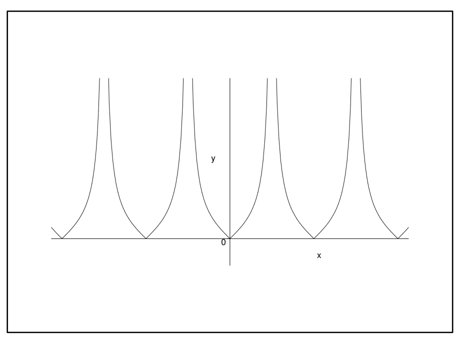
ESERCIZIO **?? d)** $x \longrightarrow \ \sin|x|$



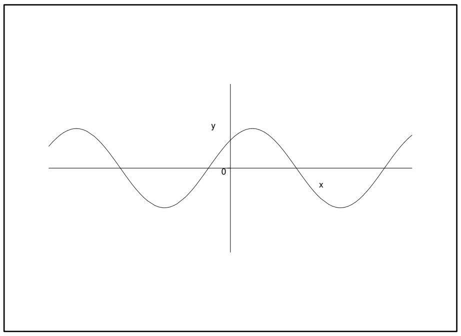
ESERCIZIO **?? e)** $x \longrightarrow \ \cos|x|$



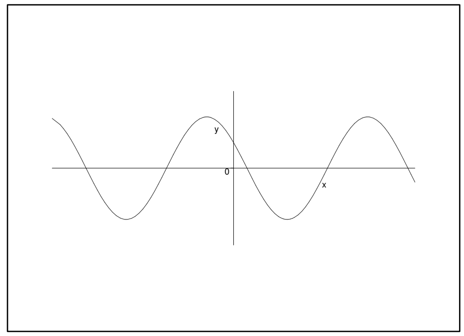
ESERCIZIO **?? f)** $x \longrightarrow \ |\tan x|$



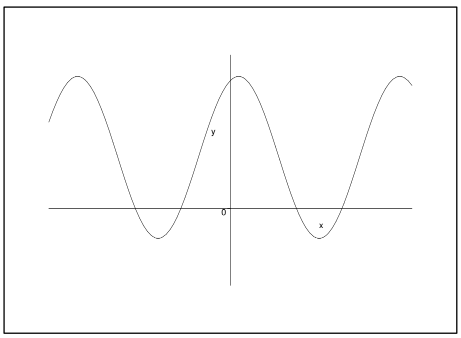
ESERCIZIO **?? g)** $x \longrightarrow \sin x + \cos x$
Osservare che
$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;



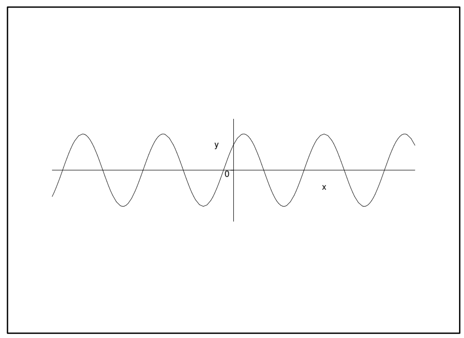
ESERCIZIO **?? h)** $x \longrightarrow \cos x - \sqrt{3}\, \sin x$
Osservare che
$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$



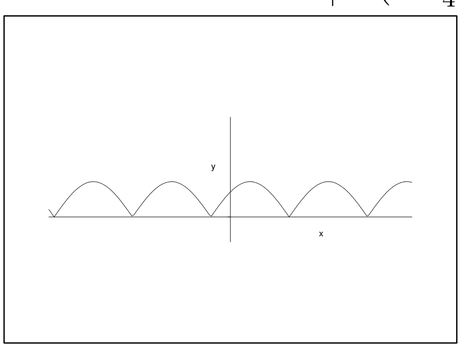
ESERCIZIO **?? i)** $x \longrightarrow 2 + \sin x + 3\cos x$
Osservare che
$2 + \sin x + 3\cos x = 2 + \sqrt{10}\sin(x + \arctan 3)$



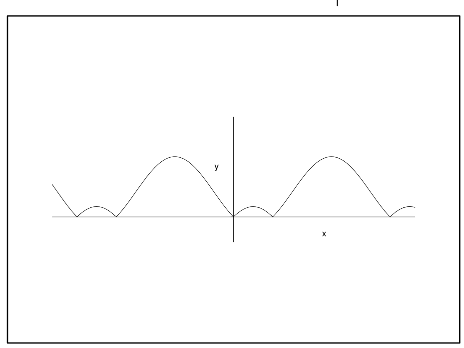
ESERCIZIO **?? j)** $x \longrightarrow \sin 2x + \cos 2x$
Osservare che
$x \longrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$



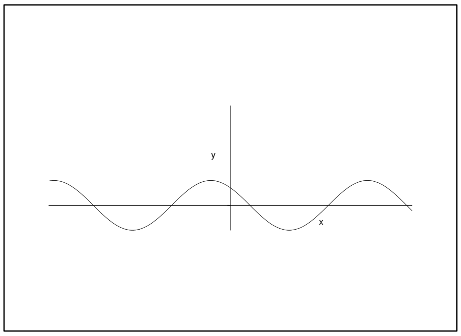
ESERCIZIO **?? k)** $x \longrightarrow |\sin x + \cos x|$
Osservare che
$x \longrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$



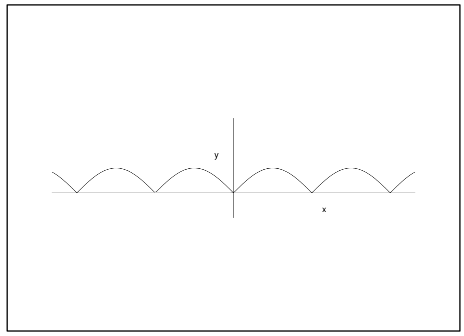
ESERCIZIO **?? l)** $x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x|$
Osservare che
$x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x| = \left|1 - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$



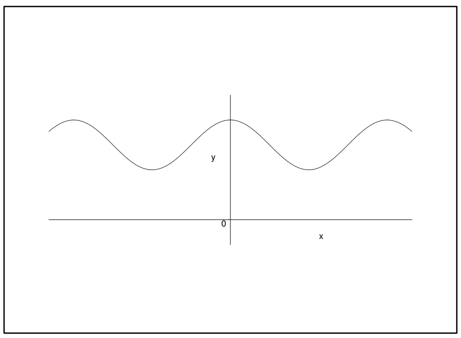
ESERCIZIO **?? m)** $x \longrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



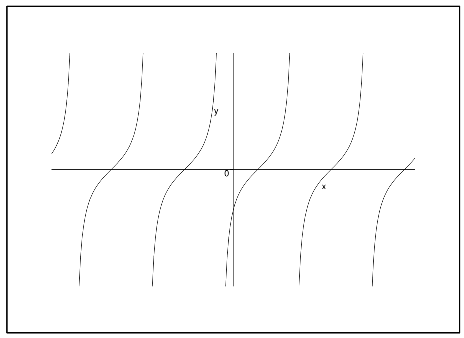
ESERCIZIO **?? n)** $x \longrightarrow |\sin|x||$



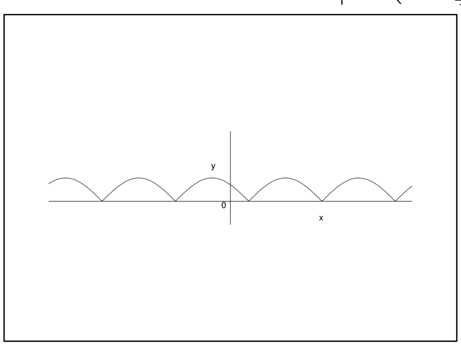
ESERCIZIO **?? o)** $x \longrightarrow 3 + \cos x$



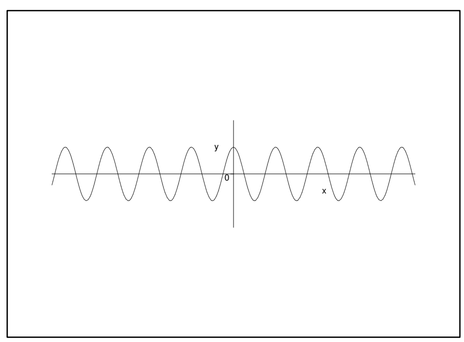
ESERCIZIO **?? p)** $x \longrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



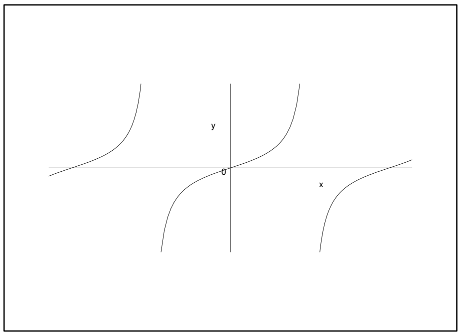
ESERCIZIO **?? q)** $x \longrightarrow \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$



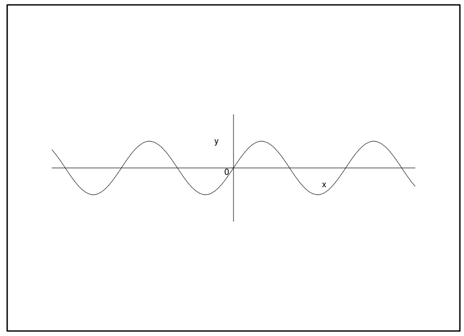
ESERCIZIO **?? r)** $x \longrightarrow \cos 4x$



ESERCIZIO **??** **s)** $x \longrightarrow \tan\dfrac{x}{3}$



ESERCIZIO **??** **t)** $x \longrightarrow \sin\dfrac{3}{2}x$



8.5

(a) $\alpha = 60^0$, $b = 10\sin 30^0 = 5$, $a = 10\cos 30^0 = 5\sqrt{3}$.

(b) $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 75^0 31'$, $\beta = 14^0 29'$, $b = 16\sin\beta = 4$, $a = 16\cos\beta = 4\sqrt{15}.$

(c) $\sin\beta = \dfrac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$
$\alpha = 26^0 334'$, $\beta = 63^0 26'$ $b = 0,6\sin\beta = 0,537$, $a = 0,6\cos\beta = 0,268$.

(d) $b = 3$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\alpha = 53^0 8'$, $\beta = 36^0 52'$.

(e) $\beta = 15^0$; $c = \dfrac{a}{\sin 75^0} = 18,63$; $b = c\cos 75^0 = 4,82$.

(f) $\cos\beta = \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\alpha = 70^0 31'$, $\beta = 19^0 29'$, $c = \dfrac{b}{\sin\beta} = 24$, $a = c\cos\beta = 16\sqrt{2}$.

(g) $c = 2\sqrt{3}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60^0$ $\beta = 30^0$.

(h) $\alpha = 53^0 40'$; $c = \dfrac{72,5}{\sin\beta} = 122,37$; $a = c\sin\alpha = 98,58$.

8.6

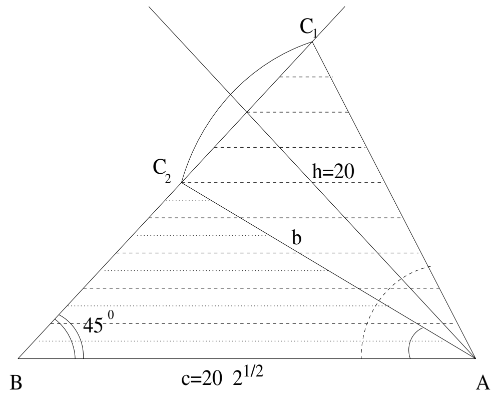
(a) $\beta = 53^o 7' 48''$, $\gamma = 96^o 52' 12''$, $a = 5,036$, $b = 8,056$

(b) $\alpha = 36^o 52' 12''$, $\beta = 73^o 44' 23''$, $\gamma = 69^o 23' 25''$, $a = 25$, $b = 40$

(c) Innanzitutto è verificata la condizione necessaria, perché $b > c\sin\beta$ (perché $b = 20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $c\sin\beta = 20$). Inoltre esistono due soluzioni perché $b < c$. Infatti applicando il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin\gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^o}{20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \Longrightarrow \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = 0,966 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 75^o \\ \alpha_1 = 60^o \\ a_1 = 20\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} \gamma_2 = 105^o \\ \alpha_2 = 30^o \\ a_2 = 20(\sqrt{3}-1) \end{cases}$$



(d) La condizione necessaria per l'esistenza del triangolo $b > \sin\beta$ è verifficata in quanto $c\sin\beta = 20 < 40$. È verificata anche la condizione di unicità di soluzione in quanto $b > c$. Applichiamo il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin\gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^o}{40} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30^o$$

(la soluzione $\gamma = 150^o$ è da scartare).
Infine $\alpha = 105^o$ e $a = 54,64$.

(e) $\beta = 19^o28'16''$, $h = 12\sin\beta = 4 = b$; esiste dunque un unico triangolo ed è quello rettangolo.
Infine $\gamma = 90^o$, $a = 8\sqrt{2} = 11,31$, $\alpha = 70^o31'44''$

(f) $\beta = 16^o36'6''$, $h = 14\sin\beta = 4 < b$, quindi non esiste alcun triangolo.

(g) Ricaviamo $\cos\beta = -\frac{1}{9}$ e quindi $\beta = 96^o22'46''$, $\alpha = 48^o11'23''$, $\gamma = 35^o25'51''$.
I lati sono ottenuti dal *teorema dei seni*:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1,29 \quad b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1,71.$$

(h) $\alpha = 70^o31'44''$. Mentre dal *teorema di Carnot* otteniamo $a^2 = 13 - 12\cos\alpha = 9$ ovvero $a = 3$; inoltre $\gamma = \alpha$ e $\beta = 38^o56'32''$.

(i) $\alpha = 104^o28'39''$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; dal *teorema di Carnot* $a^2 = 52 - 48\cos\alpha = 64$ cioè $a = 8$.
Applichiamo il *teorema dei seni*

$$\frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{4} = \frac{\sqrt{15}}{32} \Rightarrow \beta = 46^o34'3'', \;\; \gamma = 28^o57'18''.$$

8.7

(a) Gli angoli sono uguali a quelli formati dalle rette $y = 3x$ e $y = x$ (parallele alle precedenti).
Essendo $\tan\alpha = 3$, $\tan\beta = 1$, si ha

$$\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 26^0 33'54''.$$

L'altro angolo è dunque $\gamma' = 63^0 26'6''$.

(b) Gli angoli sono quelli che la retta $y = \frac{3}{2}x$ forma con l'asse x.
Dunque $\gamma = \arctan\frac{3}{2} = 56^0 18'36''$, $\gamma' = 33^0 41'24''$.

(c) Gli angoli sono quelli tra le rette $y = -x$ e $y = \frac{x}{4}$. Essendo $\tan\alpha = -1$ e $\tan\beta = \frac{1}{4}$, si ha:

$$\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = -\frac{5}{3}, \quad \gamma = 120^0 57' 50'', \quad \gamma' = 59^0 2' 10''.$$

8.8

(a) $\cos\alpha = 2\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(b) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\qquad \tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$

(d) $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{7}{24}$

(e) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ $\qquad \tan\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$

(f) $\sin\alpha = -2\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

8.9

(a) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

(b) $\tan\alpha = -1$ $\qquad y = \frac{10}{3} - x$

(c) $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ $\qquad y = -\frac{3}{4}x - 4$

(d) $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ $\qquad y = -\dfrac{295}{96} + \dfrac{7}{24}x$

8.10

(a) $\sin 3\alpha$ $= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$
$= \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(b) $\cos 3\alpha$ $= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$
$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

(c) $\sin 4\alpha$ $= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

(d) $\cos 4\alpha$ $= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (2\cos^2\alpha - 1)^2 - 4\cos^2(1 - \cos^2\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$

8.11

(a) 0 (b) $-\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

(d) $-4\sin\alpha\cos\alpha$ (e) 0 (f) $\dfrac{4\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)^2}$

(g) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$ (h) $-\tan\alpha$ (i) 1

(l) $2\cos^2\alpha$ (m) $\dfrac{4\sin\alpha\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ (n) $-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

(o) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$ (p) $2(\cos\alpha - \sin\alpha)$ (q) $2\ \dfrac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

(r) $\dfrac{1}{4}$ (s) $-\dfrac{\sin^2\alpha}{4}$ (t) $\dfrac{4\cos\alpha - \sin^2\alpha}{2(\cos\alpha+1)}$

(u) $\dfrac{3}{4}(1-\cos\alpha)$ (v) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ (z) $2 - \cos\alpha - \cos^2\alpha$

8.12

Poniamo $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

(a) $-\dfrac{2t^2+2t}{t^2+1}$ (b) $\dfrac{2t^4-4t^3+2t^2+4t}{(t^2+1)^2}$ (c) $\dfrac{4t(1-t^2)}{t^4-6t^2+1}$

(d) $\dfrac{1-2t^2}{1+t^2}$ (e) $\dfrac{1-t}{1+t}$ (f) t

8.13

(a) $2\sin\dfrac{5}{2}\alpha\ \cos\dfrac{\alpha}{2}$

(b) $2\sin\alpha\ \cos 4\alpha$

(c) $-2\cos\dfrac{5}{2}\alpha\ \sin\dfrac{\alpha}{2} + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\ \sin\dfrac{\alpha}{2}\ \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{5}{2}\alpha\right)$

(d) $2\cos\alpha\ \cos 2\beta$

(e) $\sin\alpha\ -\ \sin\left(\beta + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\ \sin\dfrac{\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}}{2}$

(f) $\dfrac{1}{2}(\cos\alpha\ -\ 5\cos 5\alpha)$

(g) $\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\ +\ \cos\dfrac{\pi}{6}\right]\ =\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\alpha\right)$

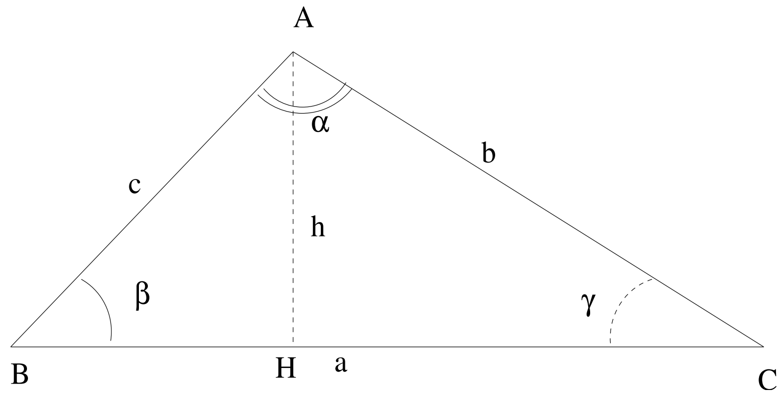
(h) $\sin(\alpha\ -\ \beta)\ -\ [\sin(\alpha\ +\ \beta)\ -\ \sin(\beta\ -\ \alpha)]\ =\ -\sin(\alpha+\beta)$

8.14

Supponiamo ad esempio siano noti a, b, γ e proviamo che l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
Se $\gamma = 90^o$ il risultato è ovvio. Distinguiamo due casi verificando che il valore $b\sin\gamma$ rappresenta la misura dell'altezza relativa al lato a in entrambi i casi.

1^o caso: $0 < \gamma < 90^o$

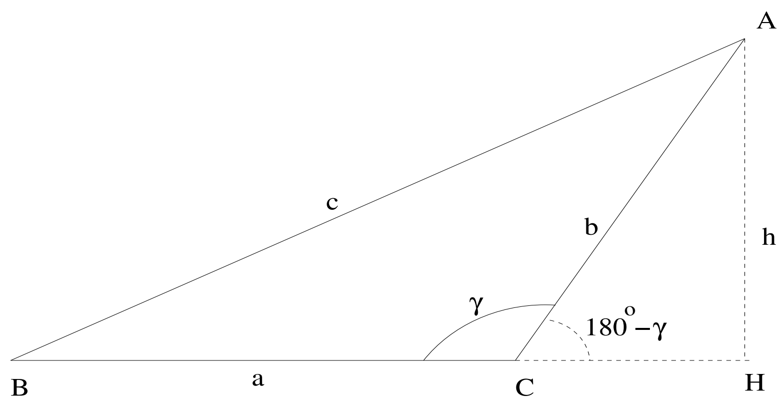
Indicata con AH l'altezza in questione e considerato il triangolo AHC, si ottiene subito l'asserto in quanto $h = b\sin\gamma$ (vedi figura).



2^o caso : $90^o < \gamma < 180^o$

Consideriamo nella figura sotto il triangolo AHC, si ha:

$$AH = b\sin(180^o - \gamma) = b\sin\gamma.$$



8.15

(a) $3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $3x = \dfrac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2}{3}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \dfrac{5\pi}{18} + h\dfrac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(b) $x - \dfrac{\pi}{3} = 2x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - 2x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \dfrac{4\pi}{9} + h\dfrac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(c) $\dfrac{\pi}{12} - x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(d) $2x - \dfrac{\pi}{12} = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x - \dfrac{\pi}{12} = -x - \dfrac{\pi}{3} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = -\dfrac{\pi}{12} + h\dfrac{2}{3}\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.

(e) $2x = x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = -x + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = k2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$, oppure $x = h\dfrac{2}{3}\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.

(f) $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4}{3}\pi - x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ dunque $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

(g) $\sin x = 0$ oppure $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dunque $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \dfrac{4}{3}\pi + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \dfrac{5\pi}{3} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.

(h) $\cos x = 1$ (la soluzione $\cos x = 2$ non è accettabile) dunque $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\tan x = 1$ dunque $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(j)

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 - \sin x + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin^2 - \sin x - 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\sin x = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

(k) $\cos x = 1$ oppure $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (la soluzione $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ non è accettabile) quindi $x = k2\pi, \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \pm \arccos \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$

(l) Nessuna soluzione.

(m) $\tan x = \pm 1$ ovvero $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

(n) $\cos x = 0$ oppure $\cos x = 1$ da cui $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.

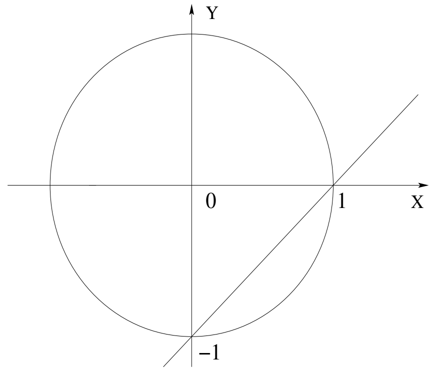
(o) Poiché i valori per cui $\cos x = 0$ non risolvono l'equazione, questa equivale a $\tan x = -1$ e dunque $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(p) Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$:

$$\begin{cases} Y - X + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono (vedi figura): $(X, Y) = (1, 0)$ oppure $(X, Y) = (0, -1)$, da cui

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = k2\pi,\ \text{oppure } x = -\frac{\pi}{2} + h2\pi,\ h, k \in \mathbb{Z}.$$



(q) Equivale a $\cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 = 0$. Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$:

$$\begin{cases} X - \sqrt{3}Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow x = \pi + k2\pi, \text{ oppure } x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, \ h, k \in \mathbb{Z}.$$

(r) Sostituendo il termine noto con $\frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$, possiamo riscrivere:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Poiché i valori che annullano il *coseno* non risolvono l'equazione, possiamo dividere per $\cos^2 x$:

$$\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $\tan x$ che per soluzioni $\tan x = -1 \pm \sqrt{2}$, e dunque $x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

(s) L'equazione equivale a $\sin^2 + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ ovvero, sostituendo il secondo membro con $\sin^2 x + cos^2 x$,

$$2\sqrt{3}\sin x \cos x = \cos^2 x,$$

da cui $\cos x = 0$ oppure $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, che implicano $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \arctan \frac{1}{2\sqrt{3}} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(t) Si sostituisce il termine noto con $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, l'equazione equivale a

$$\sqrt{3}\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ (i valori che annullano $\cos x$ non soddisfano l'equazione) si ottiene

$$\sqrt{3}\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - 1 = 0$$

che fornisce

$$\tan x = \frac{(1 - \sqrt{3}) \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{cases}$$

da cui $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = -\frac{\pi}{4} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(u) Il sistema equivale a

$$\begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + h\pi \end{cases}, \ k, h \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (h+k)\dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{6} + (h-k)\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}.$$

Poniamo $h + k = m, \ m \in \mathbb{Z}$; di conseguenza $h - k = (h + k) - 2k = m - 2k$, da cui

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + m\dfrac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}, \ m, \, k \in \mathbb{Z}.$$

(v)

$$\begin{cases} \sin y = \sqrt{3}\,\sin x \\ \tan x \, \tan y > 0 \\ \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \, \dfrac{3\sin^2 x}{1-3\sin^2 x} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = \sqrt{3}\sin x \\ \tan x \, \tan y > 0 \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

che equivalgono a

$$\begin{cases} \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \, \tan y > 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \, \tan y > 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\dfrac{2\pi}{3} + h2\pi \end{cases}$$

$h, k \in \mathbb{Z}$.

(w) I valori per cui $\cos x = 0, \ (x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z})$ risolvono l'equazione.
Per trovare le altre soluzioni dividiamo per $\cos^4 x$:

$$\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0, \ \Rightarrow \ \tan x = \pm 1, \, \pm\sqrt{3}$$

da cui $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(x) L'equazione può essere riscritta nella forma

$$\sin 2x = \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{|\cos x|},$$

cioè

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin 2x = \dfrac{5}{2} \end{cases} \text{ (che non ha soluzioni) oppure } \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Nel secondo sistema l'equazione ha come soluzioni $2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = \dfrac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, da cui $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \dfrac{5\pi}{12} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Perché sia poi soddisfatta anche la condizione sul coseno deve essere $x = \dfrac{\pi}{12} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \dfrac{5\pi}{12} + (2h+1)\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.

(y)

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Poiché

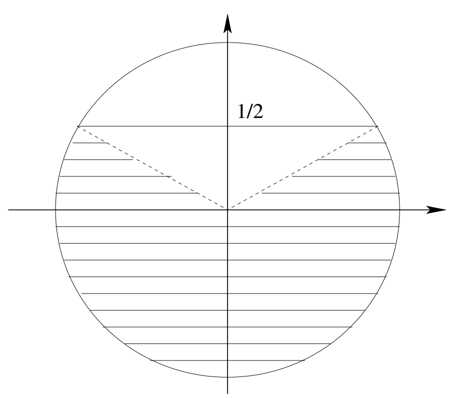
$$\sqrt{2} + \frac{1}{1+x^2} > \sqrt{2},$$

l'equazione non ha soluzioni.

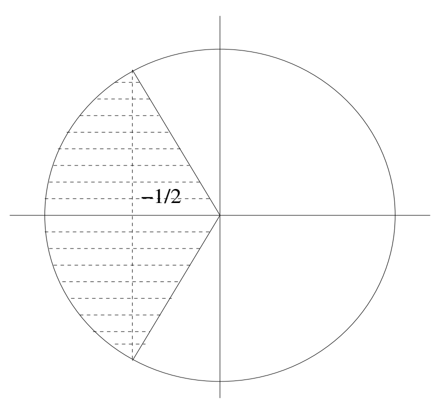
(z) L'equazione equivale a $\sin^2 x = \dfrac{4-\alpha}{7}$ ed ammette soluzioni se e solo se $0 \le \dfrac{4-\alpha}{7} \le 1$,
cioè $-3 \le \alpha \le 4$. Se $\alpha = -3$ allora $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Se invece $-3 < \alpha < 4$ allora
$x = \arcsin\sqrt{\dfrac{4-\alpha}{7}} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \pi \pm \arcsin\sqrt{\dfrac{4-\alpha}{7}} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$.
Infine per $\alpha = 4$ risulta $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

8.16

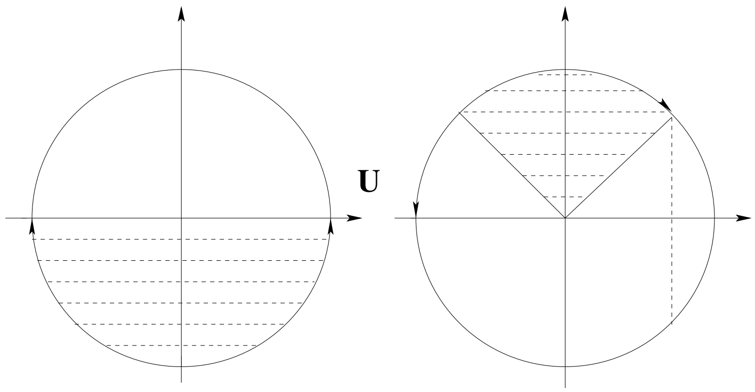
(a) $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



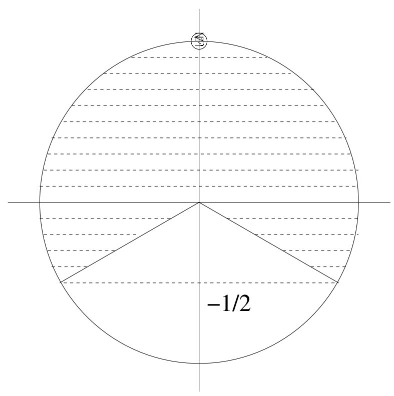
(b) $\dfrac{2}{3}\pi + k2\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



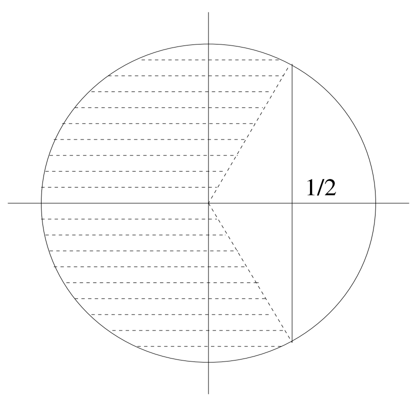
(c) $\sin x < 0$ oppure $\sin x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ da cui $\pi + h2\pi < x < 2\pi + h2\pi,\;\; h \in \mathbb{Z}$, oppure $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\; k \in \mathbb{Z}$.



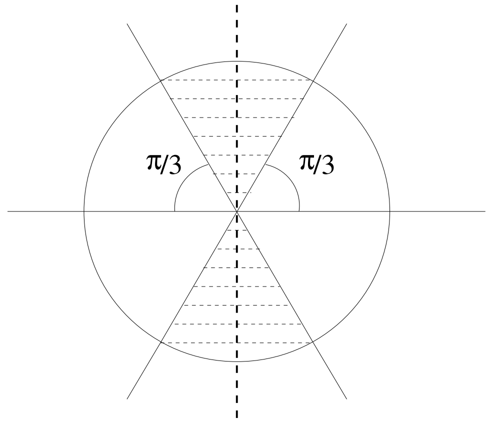
(d) $-\dfrac{1}{2} < \sin x < 1$ da cui $-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi < x < \dfrac{7}{6}\pi + k2\pi,\; k \in \mathbb{Z}$ e $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\; k \in \mathbb{Z}$.



(e) $2\cos^x - 5\cos x + 2 > 0$ da cui $\cos x < \dfrac{1}{2}$ oppure $\cos x > 2$; quest'ultima non ha soluzioni, mentre la prima è risolta da $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + k2\pi,\; k \in \mathbb{Z}$.



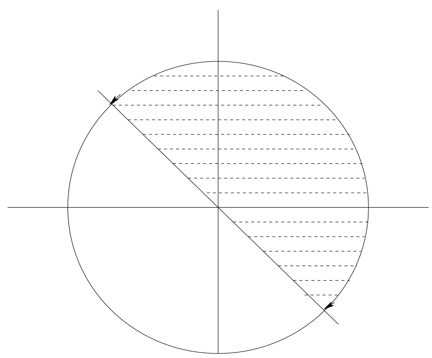
(f) Equivale a $-2 \leq \tan x \leq -\sqrt{3}$ oppure $\sqrt{3} \leq \tan x \leq 2$, da cui $\dfrac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \arctan 2 + k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$ oppure $-\arctan 2 + h\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{3} + h\pi,\; h \in \mathbb{Z}$.



(g) Posto $X = \cos x,\ Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

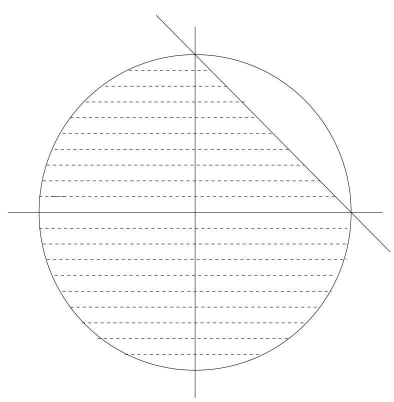
da cui $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$



(h) Posto $X = \cos x,\ Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y + X - 1 < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$



(i) $\frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x) + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\sin x) \le 0$ che equivale a $\sin x + \cos x \ge 0$, a questo punto procediamo come nell'esercizio precedente ed otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi \le x \le \frac{3}{4}\pi + k2\pi$.

(j) $\cos x = 0$ oppure $\tan^2 x > 1$, da cui $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(k) $\cos x = 0$ oppure $\cos^3 x(\tan^3 x + 1) > 0$; queste condizioni equivalgono alle seguenti

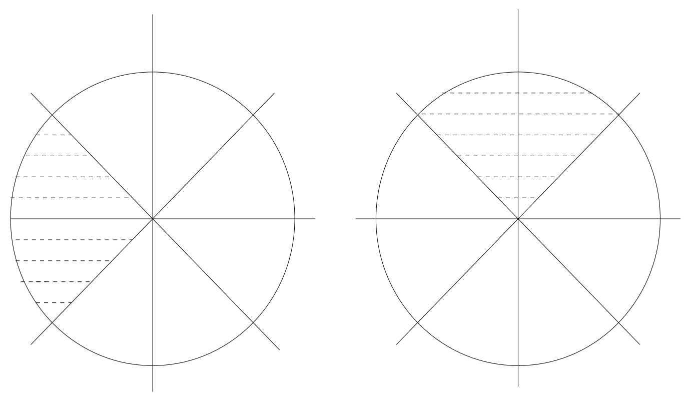
$$\cos x = 0 \text{ oppure } \begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x > -1 \end{cases} \text{ oppure} \begin{cases} \cos x < 0 \\ \tan x < -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(l) $2\cos^2 x(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) < 0$ ovvero $(2\cos^2 x - 1)(\cos x + \sin x) < 0$ che equivale a

$$\begin{cases} \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oppure } \cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k2\pi,\ x \ne \frac{3}{4}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



(m) Utilizziamo la formula $\tan x = \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$. Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ e sostituiamo nel testo:

$$\frac{t(t^2+1)}{t^2-1} > 0$$

Le soluzioni sono $-1 < t < 0$ oppure $t > 0$. Da cui $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < k\pi$ oppure $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ da cui $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Queste condizioni si possono sintetizzare nella seguente $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(n) Utilizziamo la formula $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ ottenendo $3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\cot x \ge 0$, da cui seguono

$$\begin{cases} \cos^2\frac{x}{2} \ge \frac{1}{2} \\ \cot x \ge 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \cos^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{2} \\ \cot x \le 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ k\pi < x \le \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+k\pi \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ \frac{\pi}{2}+k\pi \le x < \pi+k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ k\pi < x \le \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+k2\pi \le x \le \dfrac{3\pi}{2}+k2\pi \\ \frac{\pi}{2}+k\pi \le x < \pi+k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dal primo sistema si ottiene $2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ oppure $x = \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Dal secondo sistema si ottiene $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \le x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
In definitiva $k2\pi < x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(o) $\tan x < 0$ oppure $\tan x > 1$. Le soluzioni sono dunque $\dfrac{\pi}{4}+k\pi < x < \pi + k\pi,\ x \ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(p) Perché sia definita $\tan\frac{x}{2}$ deve essere $x \ne \pi + k2\pi$. Utilizzando le formule parametriche, la disequazione diventa $\tan^2\dfrac{x}{2}\left(\tan^2\dfrac{x}{2}-1\right) > 0$ cioè

$$\begin{cases} \tan\dfrac{x}{2} \ne 0 \\ \tan\dfrac{x}{2} > 1 \ \text{ oppure } \ \tan\dfrac{x}{2} < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+k2\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi \\ x \ne \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

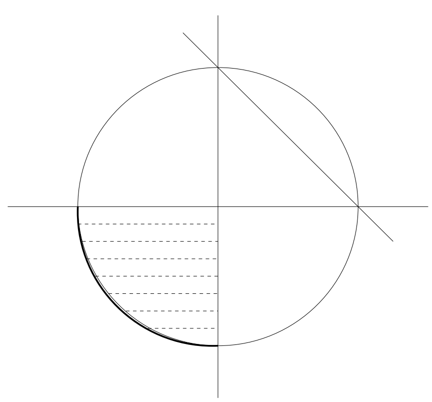
(q) La disequazione ha senso se

$$\begin{cases} \cos 2x \ne 1 \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \iff x \ne k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

La disequazione equivale a
$\sin x \cos x > \cos^2 x \iff \cos x(\sin x - \cos x) > 0 \iff \dfrac{\pi}{4}+k\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(r) La disequazione ha senso se $x \ne k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, ed equivale a

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x \cos x} < 0$$



Ponendo $Y = \sin x,\ X = \cos x$ diventa

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ \dfrac{Y + X - 1}{XY} < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

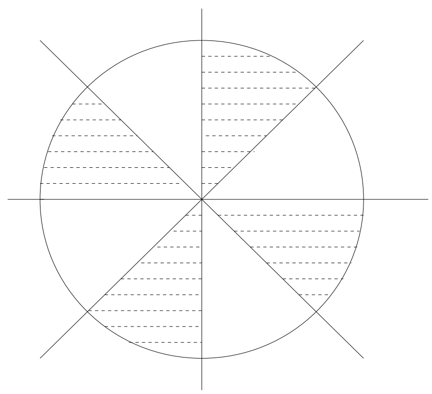
(s) La disequazione ha senso per $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, ed equivale a

$$\frac{2\sin^3 x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \leq 0$$

Ponendo $X = \cos x, \ Y = \sin x$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4XY^3}{X^2 - Y^2} \leq 0 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} .$$

Le soluzioni sono $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4} < x \leq \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$.



(t) La disequazione proposta equivale alla seguente:

$$\frac{\sin x(\cos x + 1)}{\sqrt{2}\cos^2 x} < 0$$

Ponendo $X = \cos x, \ Y = \sin x$ ci siamo ricondotti a risolvere il sistema

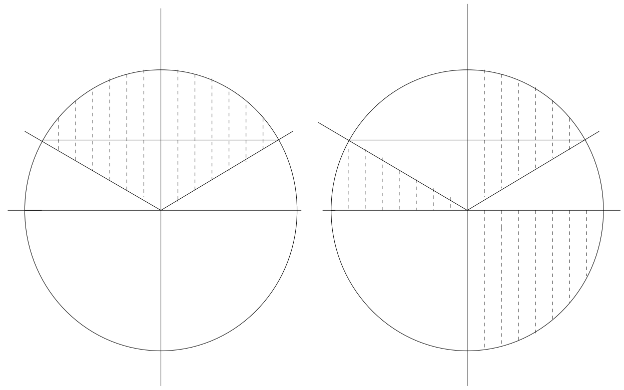
$$\begin{cases} \dfrac{Y(X+1)}{X^2} < 0 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} .$$

Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi, \ x \neq \dfrac{3}{2}\pi + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

(u) La disequazione proposta equivale alla seguente

$$\frac{(2\sin^2 x + \sin x - 1)\tan x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1} \geq 0$$

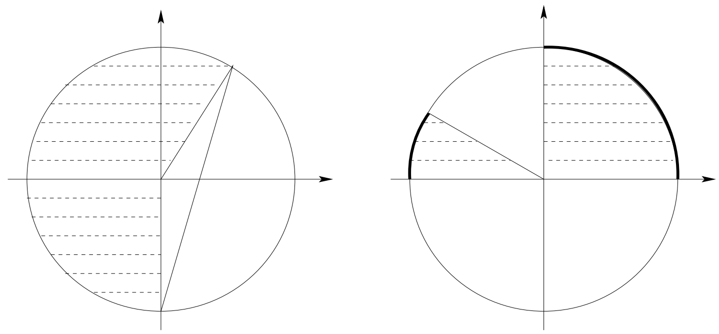
Consideriamo il numeratore: $2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \iff \sin x \leq -1$ oppure $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$ (figura sotto, a sinistra). Il segno del numeratore è espresso nella figura sotto, a destra.



Consideriamo il denominatore: ponendo $X = \cos x,\ Y = \sin x$ otteniamo:

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

La soluzione geometrica è indicata nella figura sotto, a sinistra.



Infine le soluzioni sono $0 + k2\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2}\pi + k2\pi$ oppure $\dfrac{5}{6}\pi + k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

(v) Studiamo il segno del numeratore: $\tan^2 2x \geq 1$ che equivale a $\tan 2x \geq 1$ oppure $\tan 2x \leq -1$ da cui $\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{8}\pi + k\dfrac{\pi}{2}$, con $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.
Semplifichiamo l'espressione al denominatore per poterne studiare il segno:

$$2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x > 0 \iff \tan^2 x - 2\tan x - 1 < 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq \tan x < 1 + \sqrt{2}$$

Le soluzioni sono $-\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{8}k\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in Z$. e $x \neq h\frac{\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$.
Le soluzioni della disequazione di partenza si hanno quando numeratore e denominatore hanno segno discorde, in definiva le soluzioni sono:

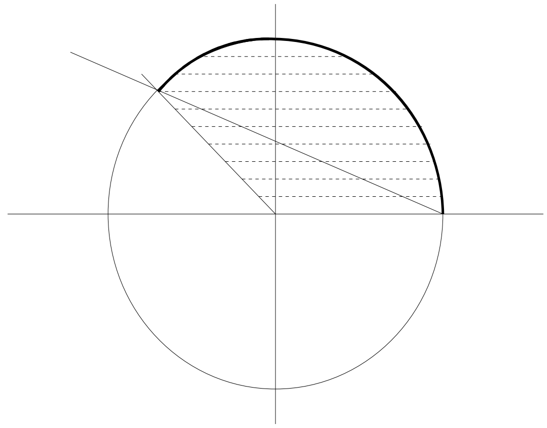
$$x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in Z,\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z.$$

(w) La prima disequazione del sistema ha soluzioni $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$, mentre la seconda è risolta da $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi < x < \dfrac{5}{6}\pi + k2\pi,\ \ k \in Z$.
Il sistema ha dunque soluzioni: $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ \ k \in Z$

(x) Ponendo $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Y + (\sqrt{2} - 1)X > \sqrt{2} - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra la retta $Y + (\sqrt{2} - 1)X = \sqrt{2} - 1$ e la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ è il punto di coordinate $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, da cui segue (vedi figura) $k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k2\pi,\ k \in Z$.



8.17

(a) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ con $x,\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la diseguaglianza assume la forma

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{2} \leq \sin(x + y)$$

Usando la formula di duplicazione e quelle di addizione:

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y \leq \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x(\cos x - \cos y) \leq \sin y(\cos x - \cos y)$$

ovvero

$$(\sin x - \sin y)(\cos x - \cos y) \leq 0.$$

La diseguaglianza è vera perchè in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la funzione *seno* è *crescente* mentre la funzione *coseno* è *decrescente* (quindi se $x < y$, $\sin x - \sin y < 0$, $\cos x - \cos y > 0$).
L'eguaglianza vale se e solo se $x = y$ cioè $\alpha = \beta$.

(b) Osserviamo che $\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, con $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Analogamente $\cos \beta = \sin \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y$, con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Tenuto conto di questo e della diseguaglianza dimostrata nel punto (a) otteniamo:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2} =$$
$$= \sin \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

(c) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$, con $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
La diseguaglianza proposta equivale alla seguente

$$\tan(x + y) \leq \frac{\tan 2x + \tan 2y}{2}$$

Otteniamo una diseguaglianza equivalente applicando al primo membro le formule di addizione ed al secondo quelle di duplicazione:

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \leq \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{\tan y}{1 - \tan^2 y}$$

I denominatori sono maggiori di zero in quanto $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \tan^3 x + \tan^3 y \geq \tan^2 x \tan y + \tan x \tan^2 y \quad &\iff \quad \tan^2 x(\tan x - \tan y) \geq \tan^2 y(\tan x - \tan y) \\ &\iff \quad (\tan x - \tan y)^2(\tan x + \tan y) \geq 0 \end{aligned}$$

Questa diseguaglianza è sempre verifcata perchè $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e quindi $\tan x > 0$ e $\tan y > 0$.
Vale il segno di eguaglianza se e solo se $\tan x = \tan y$ ovvero $x = y$.
Anche per quest'ultima implicazione si tenga presente che $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

8.18

Supponiamo che il triangolo sia isoscele in a, b (quindi $a = b$, $\alpha = \beta$), allora dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ ricaviamo $\alpha = 90^o - \frac{\gamma}{2}$ e quindi:

$$\tan \alpha = \tan\left(90^o - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\gamma}{2}}$$

Sostituendo nella formula proposta,

$$\tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta) = 2a \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = 2a = a + b.$$

Viceversa, supponiamo valga la relazione data. Portiamo tutto al primo membro:

$$a\left(1 - \tan \frac{\gamma}{2}\ \tan \alpha\right) + b\left(1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta\right) = 0;$$

utilizzando il *teorema dei seni*:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

otteniamo

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = -\frac{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta}{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha}.$$

Osserviamo che

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\gamma}{2} \sin \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2}\ \cos \alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right)}{\cos \frac{\gamma}{2}\ \cos \alpha}.$$

Analogamente

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta = \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)}{\cos \frac{\gamma}{2}\ \cos \beta}.$$

Sostituendo nella relazione sopra e semplificando:

$$(*) \quad \tan \alpha \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) + \tan \beta \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right) = 0.$$

Poichè

$$\frac{\gamma}{2} + \alpha = 180^o - \left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right),$$

da (*) otteniamo

$$\tan\alpha - \tan\beta = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right) = 0.$$

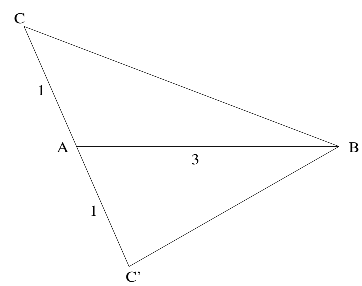
Dalla prima equazione segue $\alpha = \beta$, dalla seconda $\dfrac{\gamma}{2} + \beta = 90^o$ e quindi $\dfrac{\gamma}{2} + \alpha = 90^o$: anche in questo caso $\alpha = \beta$.

8.19

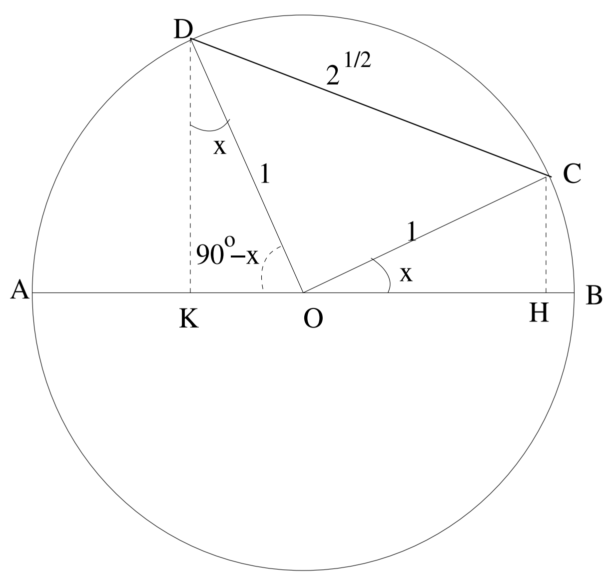
Applicando due volte il teorema del coseno, si ha:

$$BC^2 = 10 - 6\cos 120^o = 13, \quad BC'^2 = 10 - 6\cos 60^o = 7$$

Il perimetro vale $2 + \sqrt{7} + \sqrt{13}$



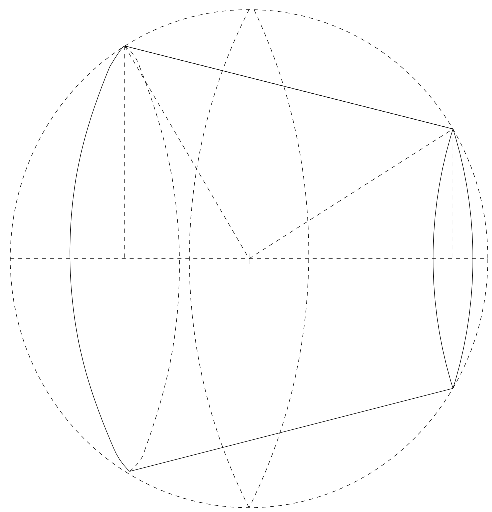
8.20



Poniamo (vedi figura)

$$OK = \sin x,\ OH = \cos x,\ DK = \cos x,\ CH = \sin x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Da cui $V_1 = \pi(\sin x + \cos x)$ e $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi$.
Il volume V_3 è il tronco di cono ottenuto dalla rotazione di DC a cui si tolgono due coni ottenuti dalla rotazione di OD e di OC.



Volume del tronco di cono:

$$\frac{1}{3}\pi KH(DK^2 + CH^2 + DK\ CH) = \frac{1}{3}\pi(\sin x \cos x)(1 + \sin x\ \ \cos x)$$

Volume del cono generato da OD

$$\frac{1}{3}\pi KD^2\ OK = \frac{1}{3}\pi\ \cos^2 x \sin x$$

Volume del cono generato da OC

$$\frac{1}{3}\pi CH^2\ OH = \frac{1}{3}\pi\ \sin^2 x \cos x$$

Da cui segue

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\,(\sin x + \cos x).$$

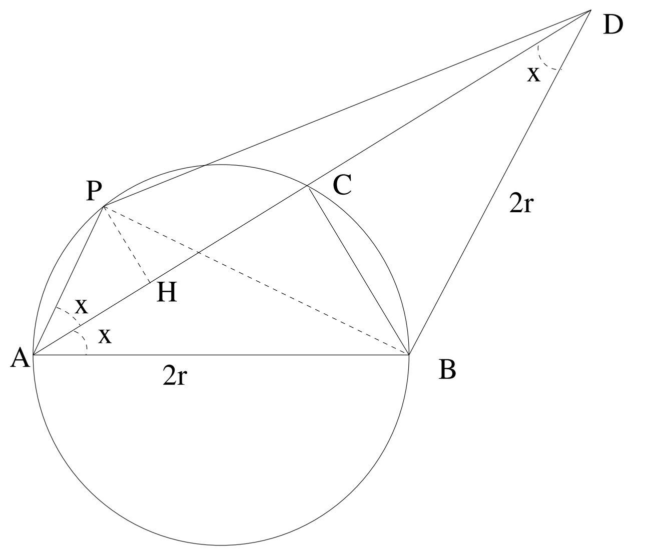
Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = 3 + \frac{4}{\sin x + \cos x} = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}}$$

La funzione è minima quando il denominatore è massimo.
Questo accade per $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ cioè $x = \dfrac{\pi}{4}$.

8.21

Il triangolo ABD è isoscele e dunque l'altezza BC è anche mediana (vedi figura).



Quindi

$$\begin{aligned}
AD = 2AC &= 4r\cos x,\ AP = 2r\cos 2x,\ PH = 2r\ \cos 2x\ \sin x, \\
area\, PAD &= 2r\ \cos x\ 2r\ \cos 2x\ \ \sin x = 2r^2\ \sin 2x\ \cos 2x = r^2\ \sin 4x \\
area\, ACB &= \frac{1}{2}\, AC\ \cdot\ BC = 2r^2\ \sin x \cos x = r^2\ \sin 2x.
\end{aligned}$$

L'area di PAD è massima per $4x = \dfrac{\pi}{2}$ cioè $x = \dfrac{\pi}{8}$.
Mentre $area\, PAD = area\, ACB$ per $\sin 4x = \sin 2x$.
L'equazione è verificata per i seguenti valori di x

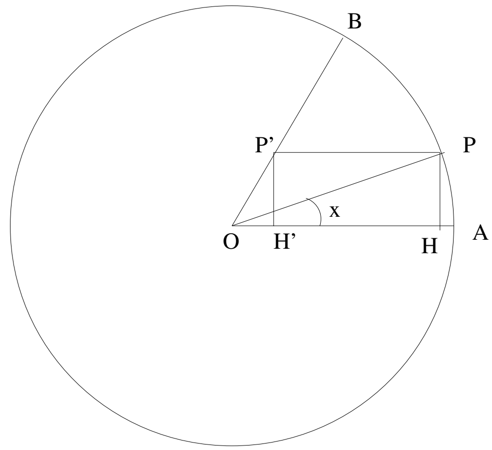
$$\begin{gathered}
4x = 2x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\
4x = \pi - 2x + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}
\end{gathered}$$

In definitiva la soluzione del problema è $x = \dfrac{\pi}{6}$ (la soluzione $x = 0$ ovviamente non è accettabile).

8.22

Osserviamo quanto segue (vedi figura)

$$\begin{aligned}
PH &= r\sin x,\ OH = r\cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \\
OH' &= \frac{P'H'}{\tan 60^o} = \frac{PH}{\tan 60^o} = \frac{r\ \sin x}{\sqrt{3}} \\
HH' &= OH - OH' = r\ \cos x - \frac{r}{\sqrt{3}}\ \sin x
\end{aligned}$$



Da queste relazioni ricaviamo

$$\begin{aligned} area\ H'HPP' &= r\sin x\left(2\cos x - \frac{r}{\sqrt{3}}\sin x\right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin^2 x\right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right] = \end{aligned}$$

Il termine $2x + \dfrac{\pi}{6}$ varia tra $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5}{6}\pi$.
Il seno è massimo per $2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$, cioè per $x = \dfrac{\pi}{6}$.

8.23

Dimostriamo l'identità applicando il *principio di induzione*.
Per $n = 1$ l'eguaglianzza è banalmente verificata.
Posto

$$\mathcal{P}(n): \ \sum_{i=1}^{n} \sin i\alpha = \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha \ \sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. A tale scopo si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \sin i\alpha &= \quad \text{(per la proprietà del simbolo di sommatoria)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sin i\alpha + \sin(n+1)\alpha = \quad \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha \ \sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin(n+1)\alpha = \\ &= \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha \ \sin\frac{n+1}{2}\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\ \sin(n+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \text{(per le \textit{formule di prostaferesi})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\frac{1}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}\; - \;\frac{1}{2}\,\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{P}(n+1): \;\sum_{i=1}^{n+1}\sin i\alpha \;=\; \frac{\sin\frac{n+1}{2}\,\alpha\;\;\sin\frac{n+2}{2}\,\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

otteniamo la tesi mediante le *formule di prostaferesi*:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\,\alpha\;\;\sin\frac{n+2}{2}\,\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\;\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\;\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

8.24

Campo di esistenza: deve essere $\sin x \neq \pm 1$, cioè (limitatamente al dominio assegnato) $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Segno e zeri: studiamo la disequazione $f(x) \geq 0$, che equivale successivamente a:[1]

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \geq 1 \iff 1+\sin \geq 1-\sin x \iff \sin x \geq 0.$$

Dunque:

$f(x) > 0 \quad$ per $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

$f(x) < 0 \quad$ per $\quad x \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

$f(x) = 0 \quad$ per $\quad x = 0,\; x = \pm\pi.$

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$ al variare del parametro α; questo equivale successivamente alle seguenti equazioni [2]

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = e^{\alpha} \iff \sin x = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1} \tag{1}$$

Perché l'equazione ammetta soluzioni deve essere

$$\left|\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1}\right| < 1 \iff -e^{\alpha}-1 < e^{\alpha}-1 < e^{\alpha}+1,$$

e questa condizione è sempre verificata; dunque $Im\, f = \mathbb{R}$.

Iniettività: la funzione non è iniettiva perchè, per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione (1) ammette due soluzioni (limitatamente all'intervallo di variazione scelto).

Funzione inversa: restringendo il dominio alle $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, la condizione su α per la risolubilità dell'equazione (1) non cambia e dunque anche per la restrizione vale $Im\, f = \mathbb{R}$.
Questa volta peró l'equazione (1) ha un'unica soluzione

$$x = \arcsin\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1}$$

[1] Si tenga presente la proprietà del logaritmo: $\log y \geq 0 \iff y \geq 1$.

[2] Si ricordi il legame tra *esponenziale* e *logaritmo*: $\log y = \alpha \iff e^{\alpha} = y,\; \forall\alpha\in\mathbb{R},\; \forall y > 0$.

che fornisce la funzione inversa.

Riassumendo

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(\alpha) = \arcsin \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}.$$

8.25

Campo di esistenza: deve essere $\left|\dfrac{1}{2^x}\right| \leq 1$, cioè $2^x \geq 1$ che é verificata per $x \geq 0$.

Segno, zeri: poichè l'immagine della funzione $\arccos y$ è $[0, \pi]$, anche la funzione $f(x)$ è sempre positiva o nulla. In particolare è nulla se

$$\frac{1}{2^x} = \frac{\pi}{2} \iff 2^{x-1} = \frac{1}{\pi} \iff x = 1 - \log_2 \pi = \log_2 \frac{2}{\pi} \tag{2}$$

Poiché il valore trovato non appartiene al *campo di esistenza* la funzione non si annulla.

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$, al variare del parametro α:

$$\arccos \frac{1}{2^x} = \alpha \iff \frac{1}{2^x} = \cos\alpha \iff 2^x = \frac{1}{\cos\alpha} \iff x = \log_2 \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Perché la soluzione trovata abbia senso, deve essere

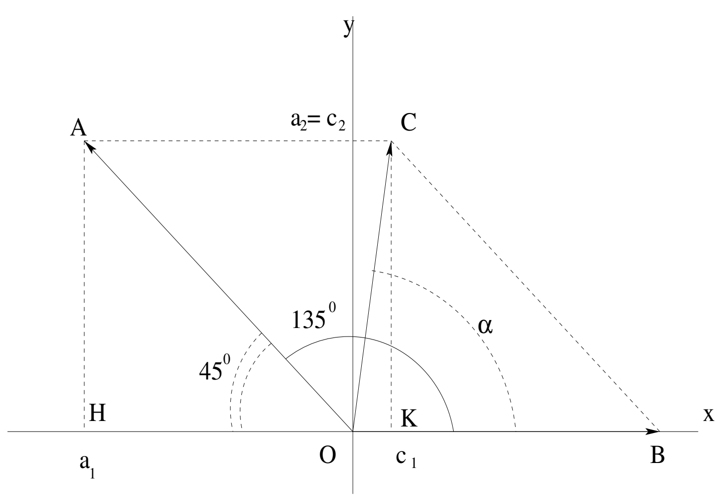
$$\frac{1}{\cos\alpha} > 0 \text{ ovvero } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Riassumendo:

$$f: [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(\alpha) = \log_2 \frac{1}{cos\alpha}.$$

8.26

Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura). Quindi $B = (b_1, b_2) = (7, 0)$, $A = (a_1, a_2)$.



Nel triangolo rettangolo AHO l'angolo $\widehat{HOA}$ misura 45^0 e quindi

$$a_2 = HA = 9\ \sin 45^0 = 6,3639; \qquad a_1\ = -9\ \cos 45^0 = -6,3639.$$

Da questo otteniamo le coordinate di C

$$C = (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (7 - 6,3639\,; 6,3639) = (0,6360\ ;\ 6,3639)$$

e dunque

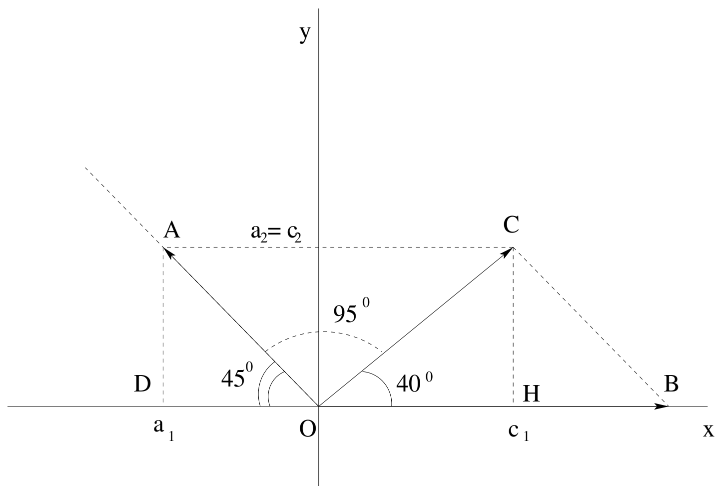
$$\|C\| = \sqrt{(6,3639)^2 + (0,6360)^2} = 6,3956$$

L'angolo α può essere ricavato dalla relazione

$$\tan\alpha = \frac{c_2}{c_1} = \frac{6,3639}{0,6360} \Rightarrow \alpha = 84^0 26' 1''$$

8.27

Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura).



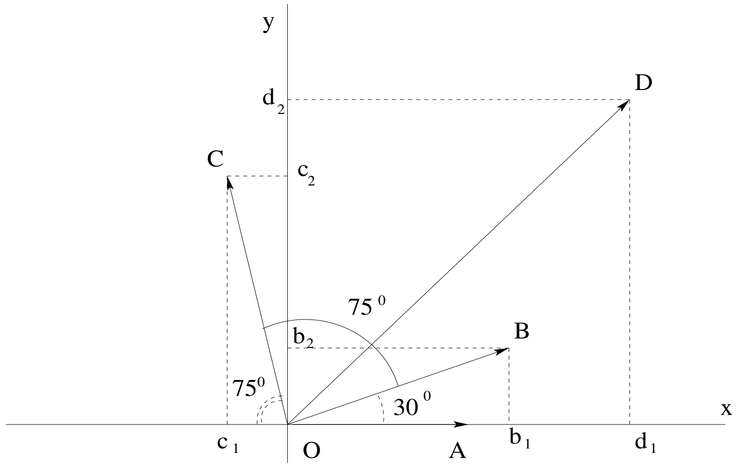
Consideriamo il triangolo CHO :

$$CH = 9\ \sin 40^0 = 5,785 = c_2 \quad \text{e} \quad OH = 9\ \cos 40^0 = 6,984 = c_1$$

Osserviamo che $AD = CH$, quindi $a_2 = 5,785$. Nel triangolo rettangolo ADO l'angolo $\widehat{DOA}$ misura 45^0, per cui essendo $OD = DA = 5,785$ si ha $a_1 = -5,785$.
Le coordinate di B si deducono dalla relazione $B = C - A : b_1 = c_1 - a_1 = 6,984 + 5,785 = 12,679$, mentre, ovviamente, $b_2 = 0$.
Per concludere $\|B\| = 12,679$ mentre $\|A\| = \dfrac{a_2}{\sin 45^0} = 8,181$

8.28

Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore A si trovi sull'asse x (vedi figura).



Calcoliamo le componenti (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(c_1,\, c_2)$ dei vettori A, B, C:

$$a_1 = 10,\;\; a_2 = 0, \quad b_1 = 12\cos 30^0 = 10,392,\;\; b_2 = 12\sin 30^0 = 6,$$
$$c_1 = 15\cos 105^0 = -15\cos 75^0 = -3,882 \;\; c_2 = 15\sin 105^0 = 14,488$$

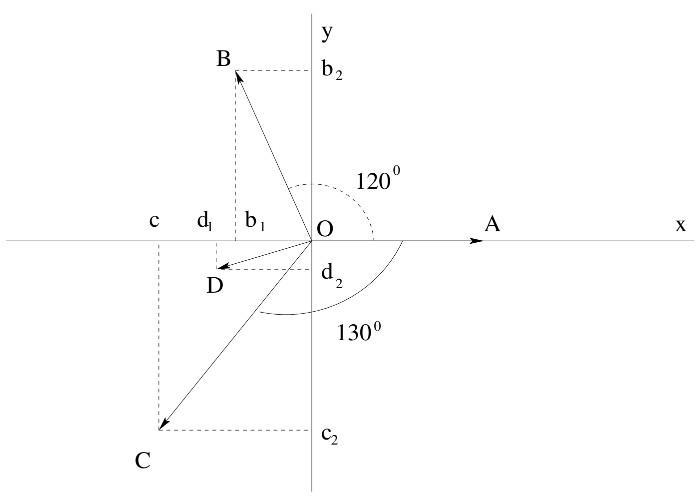
Da cui, essendo $D = A + B + C$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_1 + c_1 = 10 \,+\, 10,392 \,-\, 3,882 = 16,510, \\ d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 0 \,+\, 6 \,+\, 14,488 = 20,488, \end{aligned}$$

da cui $\|D\| = 26,312$.

8.29

Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore A si trovi sull'asse x (vedi figura).



Calcoliamo le componenti (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(c_1,\, c_2)$ dei vettori A, B, C:

$$a_1 = 6,\;\; a_2 = 0, \quad b_1 = 8\cos 120^0 = -8\cos 60^0 = -4,\;\; b_2 = 8\sin 120^0 = 6,928,$$
$$c_1 = -10\cos 50^0 = -6,427 \;\; c_2 = -10\sin 50^0 = -7,660$$

Da cui, essendo $D = A + B + C$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_1 + c_1 = 6 \,-\, 4 \,-\, 6,427 = -4,427, \\ d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 0 \,+\, 6,928 \,-\, 7,660 = -0,732, \end{aligned}$$

ovvero $\|D\| = 4,487$.