Capitolo 8: introduzione alla trigonometria

8.1

Trasformare da gradi sessagesimali a radianti o viceversa

(a) 30^0; (b) 270^0; (c) 360^0; (d) 1^0; (e) 45^0; (f) 135^0; (g) 245^0; (h) 15^0; (i) $10^0 30'$;
(j) $13^0 9''$; (k) $14^0 30' 9''$;

(l) $\frac{\pi}{8}$; (m) 2π; (n) $\frac{3}{2}\pi$; (o) $\frac{2}{3}\pi$; (p) 1; (q) $\frac{\pi}{12}$; (r) $\frac{3}{8}\pi$; (s) $\frac{11}{6}\pi$; (t) $\frac{7}{5}\pi$; (u) $\frac{11}{24}\pi$;
(v) $\frac{13}{45}\pi$.

8.2

Stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi di cui si conosce l'ampiezza (il primo estremo è sempre fissato nel punto (1,0)):

(a) -110^0; (b) -330^0; (c) 225^0; (d) 175^0; (e) -220^0; (f) 375^0;

(g) $\frac{5}{6}\pi$; (h) $-\frac{\pi}{6}$; (i) $-\frac{13}{6}\pi$; (j) $\frac{5}{4}\pi$; (k) $-\frac{4}{3}\pi$; (l) $-\frac{8}{3}\pi$; (m) $\frac{7}{3}\pi$; (n) 1

8.3

Studiare la periodicità delle seguenti funzioni.

(a)	$\cos(x-2)$	(b)	$\sin(3x+\dfrac{\pi}{8})$	(c)	$\cos(\dfrac{\pi}{4}x-2)$
(d)	$2\tan 3x$	(e)	$\sin x+\cos\dfrac{x}{3}$	(f)	$\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$
(g)	$\cos 3x\,\cos 5x$	(h)	$\tan x\tan 2x$	(i)	$\sin x+\sin \pi x$

8.4

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni.

(a)	$\sin 2x$	(b)	$\sin(x-1)$	(c)	$\sin\dfrac{x}{2}$	(d)	$\sin\lvert x\rvert$
(e)	$\cos\lvert x\rvert$	(f)	$\lvert\tan x\rvert$	(g)	$\sin x+\cos x$	(h)	$\cos x-\sqrt{3}\sin x$
(i)	$2+\sin x+3\cos x$	(j)	$\sin 2x+\cos 2x$	(k)	$\lvert\sin x+\cos x\rvert$	(l)	$\lvert 1-\sin x-\cos x\rvert$
(m)	$\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$	(n)	$\lvert\sin\lvert x\rvert\rvert$	(o)	$3+\cos x$	(p)	$\tan(x-\dfrac{\pi}{3})$
(q)	$\lvert\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\rvert$	(r)	$\cos 4x$	(s)	$\tan\dfrac{x}{3}$	(t)	$\sin\dfrac{3}{2}x$

8.5

Risolvere i seguenti triangoli rettangoli (con le notazioni standard, in particolare, c indica l'ipotenusa)

$(a)\begin{cases} c=10 \\ \beta=30^0 \end{cases}$ $(b)\begin{cases} c & =16 \\ \sin\beta & =\frac{1}{4} \end{cases}$ $(c)\begin{cases} c & =0,6 \\ \tan\beta & =2 \end{cases}$ $(d)\begin{cases} c=5 \\ a=4 \end{cases}$

$(e)\begin{cases} a=18 \\ \alpha=75^0 \end{cases}$ $(f)\begin{cases} b & =8 \\ \sin\beta & =\frac{1}{3} \end{cases}$ $(g)\begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ $(h)\begin{cases} b=72,5 \\ \beta=36^0 20' \end{cases}$

8.6

Risolvere i seguenti triangoli.

$(a)\begin{cases} c= & 10 \\ \alpha= & \frac{\pi}{6} \\ \cos\beta= & \frac{3}{5} \end{cases}$ $(b)\begin{cases} c= & 39 \\ \cos\alpha= & \frac{4}{5} \\ \beta= & 2\alpha \end{cases}$ $(c)\begin{cases} c= & 20\sqrt{2} \\ \beta= & \frac{\pi}{4} \\ b= & 20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \end{cases}$

$(d)\begin{cases} c= & 20\sqrt{2} \\ \beta= & \frac{\pi}{4} \\ b= & 40 \end{cases}$ $(e)\begin{cases} c= & 12 \\ \tan\beta= & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b= & 4 \end{cases}$ $(f)\begin{cases} c= & 14 \\ \cos\beta= & \frac{3}{7}\sqrt{5} \\ b= & 3 \end{cases}$

$(g)\begin{cases} c= & 1 \\ \beta= & 2\alpha \\ \cos 2\alpha= & -\frac{1}{9} \end{cases}$ $(h)\begin{cases} c= & 3 \\ b= & 2 \\ \tan\alpha= & 2\sqrt{2} \end{cases}$ $(i)\begin{cases} c= & 4 \\ b= & 6 \\ \cos\alpha= & -\frac{1}{4} \end{cases}$

8.7

Calcolare gli angoli formati dalle coppie di rette di equazione:

$(a)\begin{cases} y= & 3x-1 \\ y= & x-4 \end{cases}$ $(b)\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ y=-2 \end{cases}$ $(c)\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-4y+4=0 \end{cases}$

8.8

Determinare il valore delle funzioni trigonometriche seno, coseno *e* tangente *a partire dai seguenti dati:*

$(a)\begin{cases} \sin\alpha=\frac{1}{3} \\ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ $(b)\begin{cases} \sin\alpha=\frac{1}{2} \\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$ $(c)\begin{cases} \sin\alpha=-\frac{4}{5} \\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases}$

$(d)\begin{cases} \cos\alpha=-\frac{24}{25} \\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$ $(e)\begin{cases} \cos\alpha=-\frac{7}{8} \\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$ $(f)\begin{cases} \tan\alpha=2 \\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$

8.9

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo α indicato:

$(a)\ \begin{cases} P=(1,0) \\ \alpha=\frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\quad (b)\ \begin{cases} P=(\frac{4}{3},2) \\ \alpha=\frac{3}{4}\pi \end{cases}$ $\quad (c)\ \begin{cases} P=(0,-4) \\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$ $\quad (d)\ \begin{cases} P=(\frac{1}{4},-3) \\ \cos\alpha=\frac{24}{25},\ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

8.10

Verificare le seguenti identità.

(a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\qquad (b)$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

(c) $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ $\qquad (d)$ $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

8.11

Sviluppare e semplificare le seguenti espressioni.

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad (b)$ $\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\alpha\right)$

(c) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)$ $\qquad (d)$ $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-2\sin\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)$

(e) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad (f)$ $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}-1$

(g) $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)\tan\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right)}$ $\qquad (h)$ $\dfrac{\cos 2\alpha-1}{\sin 2\alpha}$

(i) $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)\tan\alpha}{\sin 2\alpha}$ $\qquad (l)$ $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

(m) $\tan 2\alpha+\sin 2\alpha$ $\qquad (n)$ $\cos 4\alpha+\sin^2 2\alpha-1$

(o) $\tan 2\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad (p)$ $\dfrac{2(\cos^3\alpha-\sin^3\alpha)}{2+\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha(1+\tan\alpha)}$

(q) $\tan 2\alpha(1-\tan^2\alpha)+\sin 2\alpha\ \left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$ $\qquad (r)$ $\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\alpha$

(s) $\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ $\qquad (t)$ $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha-\tan^2\frac{\alpha}{2}$

(u) $\sin\alpha\tan\alpha\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ $\qquad (v)$ $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\alpha+1$

(z) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\cos 2\alpha-\sin^2\alpha+1$

8.12

Trasformare le seguenti espressioni utilizzando le formule parametriche.

(a) $\cos\alpha - \sin\alpha - 1$

(b) $\sin 2\alpha - \cos\alpha + 1$

(c) $\tan 2\alpha$

(d) $\cos\alpha - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

(e) $\dfrac{2(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha + 1} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

(f) $\left(\tan\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\cos\alpha$

8.13

Trasformare le somme in prodotti (utilizzando le formule di prostaferesi) o viceversa (utilizzando le formule di Werner).

(a) $\sin 2\alpha + \sin 3\alpha$

(b) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$

(c) $\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin\alpha$

(d) $\cos(\alpha - 2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)$

(e) $\sin\alpha - \cos\beta$

(f) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha$

(g) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)\ \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$

(h) $\sin(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta$

8.14

Provare che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno *dell'angolo compreso:*

$$S \;=\; \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin\gamma.$$

(Sugg.: se γ è retto il risultato è immediato. Distinguere due casi a seconda che γ sia acuto oppure ottuso, e tracciare l'altezza dal vertice A al lato BC.)

8.15

Risolvere le seguenti equazioni.

(a) $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$

(b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$

(c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right) = 1$

(d) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(e) $\cos 2x = \cos x$

(f) $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{4}{3}\pi - x\right)$

(g) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

(h) $\cos^2 - 3\cos x + 2 = 0$

(i) $\sqrt{\tan^2 x + 1} = -1 + \sqrt{2} + \tan x$

(j) $|\sin^2 x - \sin x| = 2$

(k) $\cos^3 x - 2cosx + 1 = 0$

(l) $\sqrt{4 + \cos^2 x} = \sin x - 1$

(m) $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}=\sqrt{2}$ (n) $|\sin x| = |\cos x - 1|$

(o) $\sin x + \cos x = 0$ (p) $\sin x - \cos x + 1 = 0$

(q) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sqrt{3}\sin x+\frac{1}{2}=0$ (r) $\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{1}{2}$

(s) $2\sin x\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\sqrt{3}\sin x\cos x-1=0$ (t) $(3+\sqrt{3})\sin 62x+2\cos^2 x+(\sqrt{3}-1)\sin x\cos x=3$

(u) $\begin{cases}\sin(x-y)=0\\ \tan(x+y)=\sqrt{3}\end{cases}$ (v) $\begin{cases}3\sin x=\sqrt{3}\sin y\\ \tan x\tan y=1\end{cases}$

(w) $\sin^4 x-44\sin^2 x\cos^2 x+3\cos^4 x=0$ (x) $\sin 2x-\frac{3}{2}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x+\sin^2 x}}$

(y) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}+\frac{1}{1+x^2}$ (z) $\sin^2 x+4\cos 2x=\alpha$

8.16

Risolvere le seguenti disequazioni.

(a) $2\sin x-1<0;$ (b) $\cos x<-\frac{1}{2};$

(c) $\sqrt{2}\sin^2 x-\sin x>0;$ (d) $2\sin^2 x-\sin x-1<0;$

(e) $2\sin^2 x+4\cos^2 x>5\cos x;$ (f) $\sqrt{\tan^2 x-1}\geq\sqrt{2};$

(g) $\sin x+\cos x>0;$ (h) $\sin x+\cos x-1<0;$

(i) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 0;$ (j) $\sin^2-\cos^2>0;$

(k) $\sin^3 x+\cos^3 x>0;$ (l) $2\cos^3+2\cos^2 x\sin x-\sin x-\cos x<0;$

(m) $\tan\frac{x}{2}-\tan x>0;$ (n) $\left(\cos^2\frac{x}{2}+\cos x-\frac{1}{2}\right)\cot x\ \geq 0;$

(o) $1-\frac{1}{\tan x}>0;$ (p) $\tan^2\frac{x}{2}+\cos x>1;$

(q) $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}>\cot^2 x;$ (r) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}<\frac{2}{\sin^2 x};$

(s) $\frac{\tan 2x\,(1-\cos 2x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}\geq 0;$ (t) $\frac{\sin x+\tan x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}<0;$

(u) $\frac{(\sin x-\cos 2x)\tan x}{\sin x-\sqrt{3}\cos x+1}\geq 0;$ (v) $\frac{\tan^2 2x-1}{\sin 2x+\cos^2 x}\leq 0$

(w) $\begin{cases}\tan x>\sqrt{3}\\ \sin x>\frac{1}{2}\end{cases}$ (x) $\sin x+(\sqrt{2}-1)\cos x>\sqrt{2}-1.$

8.17

Dimostrare che:

(a) $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2} \le \sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \forall\alpha,\ \beta\in[0,\pi];$$

(b) $$\frac{\cos\alpha+\sin\beta}{2} \le \cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \forall\alpha,\ \beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

(c) $$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2} \ge \tan\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \forall\alpha,\ \beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

8.18

Con le notazioni standard, dimostrare che un triangolo è isoscele nei lati a, b se e solo se

$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}\ (a\tan\alpha+b\tan\beta).$$

8.19

Nel triangolo ABC si ha

$$c=3; \quad b=1; \quad \alpha=120^o$$

Prolungare il lato AC dalla parte di A e considerare su tale prolungamento il punto C' tale che $AC'=1$. Calcolare il perimetro del triangolo BCC'.

8.20

Sia $CD=\sqrt{2}$ una corda di una semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2$ (con C più vicino a B). Dette H e K le proiezioni ortogonali di C e D sul diametro, e posto $\widehat{BOC}=x$, si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{V_1+V_2}{V_3},$$

essendo V_1 il volume del cilindro avente raggio di base 1 e altezza HK, V_2 il volume della sfera di raggio 1 e V_3 il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo COD attorno ad AB.

Determinare per quali valori di x $f(x)$ è minima.

8.21

Detto P un punto della semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2r$, condurre la bisettrice t dell'angolo $\widehat{PAB}$ e indicare con C e D rispettivamente i punti di incontro di t con la semicirconferenza e con la semiretta di origine B parallela ad AP. Posto $\widehat{PAB}=2x$, scrivere la funzione

$$f(x)=\textit{area}\quad P\overset{\triangle}{A}D$$

e tracciarne il grafico. Trovare per quali valori di x l'area è massima e per quali valori il triangolo $P\overset{\triangle}{A}D$ è equivalente al triangolo $A\overset{\triangle}{C}B$.

8.22

Dato il settore circolare $A\overset{\frown}{O}B$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio r, considerare i rettangoli in esso inscritti, aventi un lato su OA. Indicato con P il vertice appartenente all'arco $A\overset{\frown}{O}B$ ed assumendo come variabile x l'angolo $\widehat{AOP}$, trovare l'area del rettangolo al variare di P. Dire per quali valori di x quest'area è massima.

Sugg.: provare che l'area vale

$$\frac{r^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin^2 x\right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right].$$

8.23

Dimostrare l'identità

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha \;=\; \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha \;\; \sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.24

Data la funzione

$$f(x) \;=\; \log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

trovarne campo di esistenza, *immagine, segno e zeri. Provare che non è invertibile, ma lo diventa se ristretta all'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Scrivere l'inversa di questa restrizione precisandone il dominio.*

8.25

Data la funzione

$$f(x) \;=\; \arccos\frac{1}{2^x},$$

trovarne campo di esistenza, *immagine, segno e zeri. Provare che è invertibile e trovare la funzione inversa.*

8.26

Dati i vettori A *e* B, *di lunghezza rispettivamente* $A = \|9\|$, $B = \|7\|$ *e l'angolo tra essi compreso* $\beta = 135^0$, *determinare il vettore somma* $C = A + B$ *nonché l'angolo* α *che questo forma con* B.

8.27

Dato il vettore C *di lunghezza* $\|C\| = 9$ *determinare i vettori* A, B *tali che* $C = A + B$, *sapendo che l'angolo compreso tra* C *e* B *misura* 40^0 *mentre l'angolo compreso tra* C *e* A *misura* 95^0.

8.28

Dati i vettori A, B, C *di lunghezza rispettivamente* 10, 12, 15, *Si determini il vettore somma* $D = A + B + C$ *sapendo che l'angolo compreso tra* A *e* B *misura* 30^0 *mentre l'angolo compreso tra* B *e* C *misura* 75^0.

8.29

Dati i vettori A, B, C *di lunghezza rispettivamente* 6, 8, 10, *Si determini il vettore somma* $D = A + B + C$ *sapendo che l'angolo compreso tra* A *e* B *misura* 120^0 *mentre l'angolo compreso tra* A *e* C *misura* 130^0.