ANALISI MATEMATICA I

CORSO DI LAUREA IN FISICA A. A. 2010/2011

Esercizio.

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & \beta, \quad \beta \geq -1. \\ a_{n+1} & = & a_n \ \log\,(2\,+\,a_n)\ , \end{cases}$$

studiarne l'andamento e dire se è limitata all variare del pararametro $\beta \geq -1$.

Svolgimento.
Studiamo per quali valori di β la successione è ben definita. Il primo passo ha senso se l'argomento del *logaritmo* è positivo: $2+\beta > 0$, ossia $\beta > -2$.
Consideriamo ora i seguenti casi.

(i) $\beta = -1$. Si ha che: $\log(2+\beta) = 0$ implica $a_1 = 0$. Procedendo per induzione, si dimostra facilmente che: $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Nello stesso modo se $\beta = 0$, si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$.

Consideriamo il caso $-1 < \beta < 0$. Essendo $1 < 2+\beta < 2$ si ha che $0 < \log(2+\beta) < 1$, di conseguenza $0 > \beta\log(2+\beta) > \beta > -1$. Quindi $-1 < a_1 < 0$. Procedendo per induzione si ha che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0$. La successione risulta in questo caso limitata. Per quanto riguarda la monotonia, osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$. Infatti $a_n < a_{n+1}$ equivale a $a_n < a_n \log(2+a_n)$, ossia $1 > \log(2+a_n)$, che è verificata in quanto, abbiamo visto sopra, $-1 < a_n < 0$. Si osservi che la dimostrazione della monotonia, in questo caso, non è stata fatta per induzione.
Se invece $\beta > 0$, la succesione è sempre ben definita perché $2+\beta > 1$ e quindi $a_1 = \beta\log(2+\beta) > 0$ Procedendo per induzione si ha che da $a_n > 0$ segue $a_{n+1} > 0$. In definitiva, la successione è ben definita per tutti i valori di $\beta \geq -1$.
Risulta anche che

$$a_0 > a_1 \iff \beta > \beta\,\log(2+\beta) \iff 1 > \log(2+\beta) \iff e > 2+\beta \iff e-2 > \beta.$$

Come pure

$$a_0 < a_1 \iff \beta < \beta\,\log(2+\beta) \iff 1 < \log(2+\beta) \iff e < 2+\beta \iff e-2 < \beta.$$

In particolare, se $\beta = e-2$ allora $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots a_n$, la successione è $a_n = e-2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Osserviamo anche che la funzione $f(x) = x\log(2+x)$ è strettamente crescente per $x > 0$, infatti, per ogni $x_1, x_2 > 0$ si ha:

$$x_1 < x_2 \iff \log(2+x_1) < \log(2+x_2) \iff x_1\log(2+x_1) < x_1\log(2+x_2) < x_2\log(2+x_2).$$

(Nell'ultimo passaggio si osservi che $\log(2+x_2) > 0$, perché $2+x_2 > 1$).
Da questa osservazione segue che se $\beta < 2-e$ allora $a_{n+1} < a_n$ implica $a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1}$. Mentre avevavamo osservato che $a_0 > a_1$. Per il principio di induzione si ha che la successione è decrescente. In maniera analoga: se $\beta > e-2$ allora $a_0 > a_1$ e $a_{n+1} > a_n$ implica $a_{n+2} = f(a_{n+1}) > f(a_n) = a_{n+1}$. Per il principio di induzione a_n è crescente.
Riassumiamo quanto dimostrato.

(1) Se $\beta = -1$, $\beta = 0$, oppure $\beta = e-2$, la successione è costante.

(2) Se $-1 < \beta < 0$ la successione è limitata superiormente perché $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < 0$ ed ha minimo $a_0 = \beta$, perché crescente.

(3) Se $0 < \beta < e-2$ la successione è limitata perché essendo decrescente ha massimo $a_0 = \beta$, ed inoltre è positiva.

(4) Se $e-2<\beta$ la successione essendo crescente ha minimo $a_0=\beta$. Non ha invece massimo come si vede dalle maggiorazioni che seguono.

Dimostriamo che per ogni $n\in\mathbb{N}$ risulta

$$a_n \geq \beta\,[\log(2+\beta)]^n.$$

Per induzione.
Primo passo $a_1 \geq \beta\,\log(2+\beta)$, è verificato in quanto vale proprio $=$.
Induttività della proposizione.

$$a_n \geq \beta\,[\log(2+\beta)]^n \Longrightarrow a_{n+1} \geq \beta\,[\log(2+\beta)]^{n+1}, \quad \forall n \geq 1,$$

infatti utilizzando l'ipotesi induttiva si ha

$$a_{n+1} = a_n\,\log(2+a_n) \geq \beta\,[\log(2+\beta)]^n\,\log(2+a_n) \geq$$

(per la monotonia della successione)

$$\geq \beta\,[\log(2+\beta)]^n\,\log[2+\beta\log(2+\beta)] \geq \beta\,[\log(2+\beta)]^{n+1}.$$

D'altra parte essendo $2+\beta>e$, si ha $\log(2+\beta)>1$. Ma la successione $b_n=[\log(2+\beta)]^n$ non è limitata superiormente, in quanto, se lo fosse, posto $a=[\log(2+\beta)]$, si avrebbe che esiste $M>0$ tale che per ogni $n\geq 1$, risulta $a^n<M$ ovvero, per ogni $n\geq 1$, essendo $a>1$,

$$n\,\log a < \log M \iff n < \frac{\log M}{\log a}.$$

Assurdo.