

CORSO DI LAUREA IN FISICA  
ESERCITAZIONI DI ANALISI MATEMATICA II  
ESERCIZI SUI LIMITI 2

CALCOLARE IL VALORE DEI SEGUENTI LIMITI

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{x^4}$                                    | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \log x - \frac{(x-1)^2}{x}}{(e^x - e)^3}$   |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$                                   | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$  |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$   | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right)$  |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$                                | 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - 1 \right] x$                                     |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$   | 10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) \right]^n$                              |
| 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$                    | 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \arctan x - \frac{\pi}{2} \right]$  |
| 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log \log x) e^{-x}$  | 14) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x}$  |
| 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)^{\frac{1}{2}} - (3x+5)^{\frac{1}{3}}}{[1 - \tan \frac{\pi}{4} x]^2}$ | 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e x^2 \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ |
| 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log \cos bx}$  | 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)^{\frac{1}{\tan x}}$  |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos \frac{\pi}{2} x}$                                 | 20) $\lim_{x \rightarrow a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan \left( \frac{\pi x}{2a} \right)}$                               |
| 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\tan \frac{1}{x}} \right)^x$                               | 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2 - 2 \cos x}{x^4}$  |
| 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin x}$  | 24) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{x} \left[ e - (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] \right\}$                               |

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - x^2)}{x}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{(\sin x)^2 \log x}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \log(1 + x)}{e - e^{\cos^4 x}}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin \frac{1}{x}) (x^2 e^x + 2 \log \cos x)}{x^2 \sqrt{x}}$$

$$31) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n, a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\log(1 + e^{\frac{1}{x}})] \sin x^7}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\sin^2 x} - 1 - x^4}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\log \left[ 1 + \frac{x^2}{(1+x)^3} \right] - \frac{x^2}{(1+x)^3}}$$

34) Per ogni coppia di numeri interi  $n \geq 1, m \geq 1$  determinare  $k \in \mathbb{N}$  ed  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^n - \arctan(x^m)}{x^k} = L$$

## RISULTATI

$$1) -\frac{5}{24} \quad 2) \frac{1}{2e^3} \quad 3) 1 \quad 4) 0 \quad 5) \frac{1}{4} \quad 6) 0 \quad 7) \frac{2}{3} \quad 8) -\frac{1}{2}$$

$$9) 1 \quad 10) e^{2a} \quad 11) 1 \quad 12) -1 \quad 13) 0 \quad 14) 1 \quad 15) -\frac{3}{8\pi^2} \quad 16) 0$$

$$17) \frac{a^2}{b^2} \quad 18) e \quad 19) \frac{-2e^2}{\pi} \quad 20) e^{\frac{2}{\pi}} \quad 21) +\infty \quad 22) -\frac{1}{12} \quad 23) 0 \quad 24) \frac{e}{2}$$

$$25) \sqrt{2} \quad 26) 1 \quad 27) -\infty \quad 28) 1 \quad 29) \frac{1}{2e} \quad 30) 0 \quad 31) \sqrt[3]{abc} \quad 32) 6$$

$$33) -1$$

34) se  $n < m$  :  $k = n, L = 1$ ; se  $n > m$  :  $k = m, L = -1$ ; se  $n = m$  :  $k = 3n, L = \frac{1}{6}$

## SVOLGIMENTO DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI PROPOSTI <sup>(1)</sup>

**ESERCIZIO 1** Consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$  e sostituiamolo nell'argomento della funzione *seno*

$$\sin(e^x - 1) = \sin \left[ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right].$$

Consideriamo anche lo sviluppo di Taylor di  $\sin$ :  $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$  con  $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$  ottenendo

$$\begin{aligned} \sin(e^x - 1) &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6} \left[ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right]^3 + \\ &+ o \left( \left[ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right]^3 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Osserviamo che

$$\left[ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right]^3 = x^3 + \frac{3!}{2!} \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4), \quad (2)$$

eleviamo infatti alla terza il polinomio contenuto nelle parentesi quadre utilizzando la formula (che si dimostra per induzione su  $k$ , vedi esempi e dimostrazione in Appendice)

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_k = n} \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_k!} x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k}.$$

Ciascuno dei termini dentro la parentesi quadra di (2) viene quindi elevato ad un esponente in modo tale che la somma di tutti gli esponenti sia 3. Se eleviamo alla terza  $x$ , gli altri termini sono elevati a 0; quando si eleva  $x$  al quadrato uno degli altri viene elevato alla prima potenza e così via. In particolare moltiplicando  $x^2$  per il termine  $\frac{x^2}{2}$  otteniamo  $\frac{x^4}{2}$ , mentre moltiplicando  $x^2$  per gli altri termini otteniamo tutte potenze con un esponente di  $x$  di grado superiore a quattro, quindi  $o(x^4)$ . Sostituendo (2) nell'espressione (1) si ha

$$\sin(e^x - 1) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \quad (3)$$

Sostituendo (3) nel limite proposto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4}{x^4} + \frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{5}{24}$$

---

<sup>1</sup>Gli esercizi sono tutti risolti mediante gli *sviluppi di Taylor*, provate a risolverne alcuni anche con il *teorema dell'Hospital* per vedere in quali casi l'uno risulta più conveniente dell'altro.

## ESERCIZIO 2

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:  $y = x - 1$ . Osservato che per  $x \rightarrow 1$   $y \rightarrow 0$ , possiamo scrivere:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \log(y+1) - \frac{y^2}{y+1}}{(e^{y+1} - e)^3} = \frac{1}{e^3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \log(y+1) - \frac{y^2}{y+1}}{(e^y - 1)^3}$$

Utilizziamo i seguenti *sviluppi di Taylor*:

$$\begin{aligned} \log(y+1) &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \\ \frac{1}{y+1} &= 1 - y + y^2 + o(y^2) \\ e^y &= 1 + y + o(y) \quad , \text{ da cui} \\ (e^y - 1)^3 &= [y + o(y)]^3 = y^3 + o(y^3), \text{ perch\`e} \\ [y + o(y)]^3 &= y^3 + 3y^2 o(y) + 3y[o(y)]^2 + [o(y)]^3 = \\ &= y^3 + 3o(y^3) + 3o(y^3) + o(y^3) = y^3 + o(y^3) \end{aligned}$$

Infatti

$$3y^2 o(y) = o(y^3), \quad y[o(y^2)] = o(y^3), \quad [o(y)]^3 = o(y^3), \quad 3o(y^3) = o(y^3), \quad o(y^3) + o(y^3) = o(y^3).$$

(vedi propriet\`a degli o-piccoli nel file LIMITI 1). Sostituendo sopra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \left[ y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \right] - y^2 [1 - y + o(y)]}{y^3 + o(y^3)} &= \frac{1}{e^3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}y^3 + o(y^3)}{y^3 + o(y^3)} = \\ & \text{(principio di sostituzione degli infinitesimi)} \\ &= \frac{1}{e^3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}y^3}{y^3} = \frac{1}{2e^3} \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 3** Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned} \sin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \\ & \text{(principio sostituzione infinitesimi)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 1. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 15**

Effettuiamo il cambiamento di variabile:  $y = x - 1$  ed osserviamo che per  $x \rightarrow 1$  si ha che  $y \rightarrow 0$ . Il limite proposto può quindi essere scritto nella forma seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y+4} - \sqrt[3]{3y+8}}{\left[1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}y + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} =$$

Applichiamo al denominatore le formule di addizione della *tangente*, ed al numeratore modificiamo l'espressione dei radicandi in modo da poter applicare lo sviluppo di Taylor  $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)z^2 + o(z^2)$  con i valori  $\alpha = \frac{1}{2}$  ed  $\alpha = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+\frac{y}{4}} - 2\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}y}}{\left[1 - \frac{\tan\frac{\pi}{4}y + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}y \tan\frac{\pi}{4}}\right]^2} &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{y}{4}} - \sqrt[3]{1+\frac{3}{8}y}}{\tan^2\frac{\pi}{4}y} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{y}{4}} - \sqrt[3]{1+\frac{3}{8}y}}{\sin^2\frac{\pi}{4}y} \lim_{y \rightarrow 0} \cos^2\frac{\pi}{4}y = \end{aligned}$$

Utilizziamo quindi lo sviluppo di Taylor visto sopra, rispettivamente con  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{y}{4}$  e  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $z = \frac{3}{8}y$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{y}{4}} &= 1 + \frac{y}{8} + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{y^2}{32} + o(y^2) \\ \sqrt[3]{1+\frac{3}{8}y} &= 1 + \frac{1}{8}y + \left(\frac{1}{3} - 1\right) \frac{1}{3} \frac{9}{64} \frac{y^2}{2} + o(y^2). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sin^2\frac{\pi}{4}y = \left(\frac{\pi}{4}y + o(y)\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}y^2 + \frac{\pi}{2}y o(y) + [o(y)]^2 = \frac{\pi^2}{16}y^2 + o(y^2),$$

Perché:

$$\frac{\pi}{2}y o(y) = o(y^2); \quad [o(y)]^2 = o(y^2); \quad o(y^2) + o(y^2) = o(y^2).$$

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{128}y^2 - \frac{1}{64}y^2 + o(y^2)}{\frac{\pi^2}{16}y^2 + o(y^2)} &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{128}y^2 + o(y^2)}{\frac{\pi^2}{16}y^2 + o(y^2)} = \\ &(\text{principio sostituzione infinitesimi}) \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{128}y^2}{\frac{\pi^2}{16}y^2} = - \frac{3}{8\pi^2}. \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 16

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:  $y = \frac{1}{x}$ . Osservato che per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $y \rightarrow 0+$ , sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0+} \left[ \frac{1}{y} (1+y)^{\frac{1}{y}} - e \frac{1}{y^2} \log(1+y) \right] &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left[ \frac{1}{y} e^{\frac{1}{y} \log(1+y)} - e \frac{1}{y^2} \log(1+y) \right] = \\ &= e \lim_{y \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{y} e^{[\frac{1}{y} \log(1+y) - 1]} - \frac{1}{y^2} \log(1+y) \right\} \end{aligned}$$

Utilizziamo lo *sviluppo di Taylor* dell'esponenziale:  $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$  ponendo  $t = \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1$ , e sostituiamo nell'espressione del limite:

$$\begin{aligned}
& e \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{y} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + o \left( \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 \right) \right\} - \frac{1}{y^2} \log(1 + y) \right] = \\
& = e \lim_{y \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \log(1 + y) - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{y} o \left( \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 \right) - \frac{1}{y^2} \log(1 + y) \right\} = \\
& = e \lim_{y \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 + \frac{1}{y} o \left( \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 \right) \right\} = \\
& = e \lim_{y \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{y} \log(1 + y) - 1 \right]^2 \right\} = \\
& = \frac{e}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{[\log(1 + y) - y]^2}{y^3} = \frac{e}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{[y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - y]^2}{y^3} = \\
& = \frac{e}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}y^4 + o(y^4)}{y^3} = \frac{e}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}y^4}{y^3} = 0
\end{aligned}$$

Negli ultimi passaggi abbiamo utilizzato il fatto che  $[y^2 + o(y^2)]^2 = y^4 + 2y^2o(y^2) + [o(y^2)]^2 = y^4 + o(y^4)$ . Infatti  $y^2o(y^2) = o(y^4)$ ,  $2o(y^4) = o(y^4)$  e  $o(y^4) + o(y^4) = o(y^4)$ .

### ESERCIZIO 18

Utilizzando l'artificio di Bernoulli otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\tan x} \log(x + \sqrt{1+x^2})}$$

Calcoliamo il limite dell'esponente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left[ \sqrt{1+x^2} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]}{\sin x} \cos x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{1+x^2} + \log \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \log(1+x^2) + \log \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sin x} = \end{aligned}$$

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$\log(1+y) = y + o(y) \text{ con } y = x^2 \text{ e } y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 + o(x^2) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + o\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + o(x)}.$$

Osserviamo che:

$$o(x^2) = o(x); \quad \frac{1}{2}x^2 = o(x); \quad o\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = o(x); \quad o(x) + o(x) = o(x).$$

Sostituendo ed utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1.$$

### ESERCIZIO 31

Osservato che

$$\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n} \log a}, \quad \sqrt[n]{b} = e^{\frac{1}{n} \log b}, \quad \sqrt[n]{c} = e^{\frac{1}{n} \log c},$$

Il limite da calcolare assume la forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{\frac{1}{n} \log a} + e^{\frac{1}{n} \log b} + e^{\frac{1}{n} \log c}}{3} \right)^n$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile  $x = \frac{1}{n}$  ed osserviamo che per  $n \rightarrow +\infty$  si ha che  $x \rightarrow 0^+$ . Sostituendo sopra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{x \log a} + e^{x \log b} + e^{x \log c}}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Utilizziamo gli *sviluppi di Taylor* della funzione esponenziale  $e^y = 1 + y + o(y)$ , rispettivamente con  $y = x \log a$ ,  $y = x \log b$  e  $y = x \log c$ , osservando che ciascuno di questi tende a zero per  $x \rightarrow 0$ . Sostituendo:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + x \log a + o(x) + 1 + x \log b + o(x) + 1 + x \log c + o(x)}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3 + x \log a + x \log b + x \log c + o(x)}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 1 + \frac{x[\log a + \log b + \log c] + o(x)}{3} \right\}^{\frac{1}{x}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left\{ \frac{1}{x} \log \left[ 1 + \frac{x[\log a + \log b + \log c] + o(x)}{3} \right] \right\}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left\{ \frac{1}{x} \log \left[ 1 + \frac{x \log(abc) + o(x)}{3} \right] \right\}} = e^{\frac{1}{3} \log(abc)} = \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Infatti possiamo calcolare il limite dell'esponente utilizzando lo *sviluppo di Taylor* per la funzione *logaritmo*:  $\log y = y + o(y)$  con  $y = \frac{x \log(abc) + o(x)}{3}$  (infatti per  $x \rightarrow 0$  risulta  $y \rightarrow 0$ .) e quindi

$$\begin{aligned} \log \left[ 1 + \frac{x \log(abc) + o(x)}{3} \right] &= \frac{x \log(abc) + o(x)}{3} + o\left(\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}\right) = \\ &= \frac{x \log(abc)}{3} + \frac{o(x)}{3} + o(x) = \frac{x \log(abc)}{3} + o(x). \end{aligned}$$

Perché <sup>(2)</sup>

$$\frac{o(x)}{3} = o(x), \quad o\left(\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}\right) = o(x) \quad \text{e} \quad o(x) + o(x) = o(x).$$

In definitiva il limite dell'esponente si calcola come segue:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{x} \log \left[ 1 + \frac{x \log(abc) + o(x)}{3} \right] \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(abc)}{3x} + \frac{o(x)}{x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(abc)}{3x} = \frac{1}{3} \log(abc). \end{aligned}$$

---


$${}^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o\left(\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o\left(\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}\right)}{\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{x \log(abc) + o(x)}{3}\right)}{x} = 0 \cdot \left[ \frac{\log(abc)}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} \right] = 0.$$



## APPENDICE

Dimostriamo per induzione, su  $k$ , la formula:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_k = n} \frac{n!}{\nu_1! \cdots \nu_k!} x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k}. \quad (4)$$

I) Per  $k = 2$  è vera in quanto si tratta della *formula di Newton* della potenza ennesima di un binomio. Infatti basta osservare che

$$\frac{n!}{\nu_1! \nu_2!} = \frac{n!}{\nu_1! (n - \nu_1)!} = \binom{n}{\nu_1}, \quad \nu_1 + \nu_2 = n.$$

II) Induttività della proposizione: verifichiamo che da (4) segue

$$(x_1 + \cdots + x_{k+1})^n = \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_{k+1} = n} \frac{n!}{\nu_1! \cdots \nu_{k+1}!} x_1^{\nu_1} \cdots x_{k+1}^{\nu_{k+1}}. \quad (5)$$

Modifichiamo la forma in cui è scritto il polinomio in modo da applicare l'ipotesi induttiva.

$$\begin{aligned} [(x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1}]^n &= \text{(formula di Newton del binomio)} \\ &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (x_1 + \cdots + x_k)^h x_{k+1}^{n-h} = \\ &\text{(ipotesi induttiva (3) applicata al polinomio } (x_1 + \cdots + x_k)^h) \\ &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \left( \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_k = h} \frac{h!}{\nu_1! \cdots \nu_k!} x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k} \right) x_{k+1}^{n-h} = \\ &= \sum_{h=0}^n \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_k = h} \frac{n!}{(n-h)! h!} \frac{h!}{\nu_1! \cdots \nu_k!} x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k} x_{k+1}^{n-h}. \end{aligned}$$

Da questa, ponendo  $\nu_{k+1} = n - h$ , otteniamo la tesi (5).

### Esempio di applicazione della formula (4)

Calcolare lo sviluppo di

$$(a + b + c + d)^3$$

Applicando (4) si ha

$$(a + b + c + d)^3 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 3} \frac{3!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3! \nu_4!} a^{\nu_1} b^{\nu_2} c^{\nu_3} d^{\nu_4}.$$

La seguente tabella fornisce tutti i possibili indici  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  che hanno per somma 3.

$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$
3	0	0	0
2	1	0	0
2	0	1	0
2	0	0	1
1	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
0	3	0	0
1	2	0	0
0	2	1	0
0	2	0	1
0	1	1	1
0	0	3	0
1	0	2	0
0	1	2	0
0	0	2	1
0	0	0	3
1	0	0	2
0	1	0	2
0	0	1	2

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
& (a + b + c + d)^3 = \\
& = \frac{3!}{3!} a^3 b^0 c^0 d^0 + \frac{3!}{2!} a^2 b^1 c^0 d^0 + \frac{3!}{2!} a^2 b^0 c^1 d^0 + \\
& + \frac{3!}{2!} a^2 b^0 c^0 d^1 + \frac{3!}{1} a^1 b^1 c^1 d^0 + \frac{3!}{1} a^1 b^0 c^1 d^1 + \frac{3!}{1} a^1 b^1 c^0 d^1 + \\
& + \frac{3!}{3!} a^0 b^3 c^0 d^0 + \frac{3!}{2!} a^1 b^2 c^0 d^0 + \frac{3!}{2!} a^0 b^2 c^1 d^0 + \frac{3!}{2!} a^0 b^2 c^0 d^1 + \frac{3!}{1!} a^0 b^1 c^1 d^1 + \\
& + \frac{3!}{3!} a^0 b^0 c^3 d^0 + \frac{3!}{2!} a^1 b^0 c^2 d^0 + \frac{3!}{2!} a^0 b^1 c^2 d^0 + \frac{3!}{2!} a^0 b^0 c^2 d^1 + \\
& + \frac{3!}{3!} a^0 b^0 c^0 d^3 + \frac{3!}{2!} a^1 b^0 c^0 d^2 + \frac{3!}{2!} a^0 b^1 c^0 d^2 + \frac{3!}{2!} a^0 b^0 c^1 d^2 = \dots\dots\dots
\end{aligned}$$