Analisi Matematica - Corso di Laurea in Informatica, (A.A. 2010/2011) fila A

Prova scritta del 18 Dicembre 2010

Problema 1. Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-2(x^4 - 8x^2 + 16)(9 - x^2)(x-4)^3}{3(x^2 - x - 12)(x^2 - 2x - 15)(x+3)} \leq 0 \right\}.$$

Problema 2. Risolvere l'equazione

$$z^4 + (1+i)^5 z^2 + 16 e^{i\pi/2} = 0$$

nel campo complesso.

Problema 3.

(a) Dimostrare la seguente eguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 4^{k-1}(3k-1)}{k(k+1)} = \frac{4^n - 1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Posto

$$a_n = \frac{4^n - 1}{n+1},$$

determinare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Analisi Matematica - Corso di Laurea in Informatica, (A.A. 2010/2011) fila B

Prova scritta del 18 Dicembre 2010

Problema 1. Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq x + 5 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-3(x^4 - 32x^2 + 256)(1 - x^2)(x+3)^3}{5(x^2 - x - 2)(x^2 + 4x + 3)(x+1)} \leq 0 \right\}.$$

Problema 2. Risolvere l'equazione

$$z^4 + (-i-1)^5 z^2 + \frac{32i - 16}{i+2} = 0$$

nel campo complesso.

Problema 3.

(a) Dimostrare la seguente eguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 5^{k-1}(4k-1)}{k(k+1)} = \frac{5^n - 1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Posto

$$a_n = \frac{5^n - 1}{n+1},$$

determinare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Analisi Matematica - Corso di Laurea in Informatica, (A.A. 2010/2011) fila C

Prova scritta del 18 Dicembre 2010

Problema 1. Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq x + 4 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-7(x^4 - 2x^2 + 1)(9 - x^2)(x - 4)^3}{x^5 - x^4 - 12x^3} \leq 0 \right\}.$$

Problema 2. Risolvere l'equazione

$$z^4 + (i - 1)^5 z^2 + 16e^{i3\pi/2} = 0$$

nel campo complesso.

Problema 3.

(a) Dimostrare la seguente eguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 3^{k-1}(2k - 1)}{k(k + 1)} = \frac{3^n - 1}{n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Posto

$$a_n = \frac{3^n - 1}{n + 1},$$

determinare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Analisi Matematica - Corso di Laurea in Informatica, (A.A. 2010/2011) fila D

Prova scritta del 18 Dicembre 2010

Problema 1. Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 4x + 4} \geq x + 6 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-5(x^4 - 32x^2 + 256)(4 - x^2)(x+1)^3}{3(x^2 - x - 6)(x^2 + 3x + 2)(x + 2)} \leq 0 \right\}.$$

Problema 2. Risolvere l'equazione

$$z^4 + (1 - i)^5 z^2 + \frac{32i + 16}{i - 2} = 0$$

nel campo complesso.

Problema 3.

(a) Dimostrare la seguente eguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 6^{k-1}(5k - 1)}{k(k + 1)} = \frac{6^n - 1}{n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Posto

$$a_n = \frac{6^n - 1}{n + 1},$$

determinare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA A

Problema 1. Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-2(x^4 - 8x^2 + 16)(9 - x^2)(x - 4)^3}{3(x^2 - x - 12)(x^2 - 2x - 15)(x + 3)} \leq 0 \right\}.$$

Svolgimento.

Per risolvere i quesiti proposti è necessario determinare le soluzioni delle disequazioni che definiscono gli insiemi A e B.

Iniziamo considerando l'insieme A e quindi

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1.$$

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere i due sistemi ([1])

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq (x - 1)^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Da cui

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (x - 3)^2 \geq 0 \qquad \text{(ovvero ogni) } x \in \mathbb{R} \\ 2 \geq x \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ (x - 3)^2 \geq 0 \qquad \text{(ovvero ogni) } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $1 \leq x \leq 2$, mentre del secondo $x < 1$. Quindi possiamo scrivere che

$$A = \{x : \ x \leq 2\}.$$

Osserviamo che la risoluzione della disequazione $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1$ può seguire un'altra strada in quanto, in questo caso, il polinomio sotto radice è un quadrato perfetto. Ovvero, dato che([2])

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|,$$

la disequazione può essere scritta nella forma

$$|x - 3| \geq x - 1.$$

---

[1] Ricordiamo lo sche di ragionamento da seguire nella soluzione delle disequazioni irrazionali di questo tipo. Ovvero risolvere $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ equivale a risolvere

$$\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ P(x) \geq Q^2(x) \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geq 0 \qquad \text{(realtà della radice).} \end{cases}$$

Si osservi che nel primo sistema la condizione di realtà della radice ($P(x) \geq 0$) è superflua, in quanto è conseguenza della terza disequazione. In ogni caso il suo inserimento non altera il risultato.

[2] Ricordiamo che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere([3])

$$x-1<0 \quad \vee \quad \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x-3\geq x-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-3<0 \\ -(x-3)\geq x-1 \end{cases} . \tag{3}$$

Chiaramente ritroviamo le stesse soluzioni viste sopra (si osservi che il secondo sistema non ha soluzioni).

Per determinare l'insieme B, determiniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{-2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)} \leq 0.$$

Ovvero, cambiando il segno

$$\frac{2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)} \geq 0.$$

Effettuando una scomposizione dei polinomi che compongono l'espresssione e semplificando si ha

$$\begin{aligned} \frac{(x^2-4)(3-x)(3+x)(x-4)^3}{(x-4)(x+3)(x+3)(x-5))(x+3)} &= \frac{(x^2-4)^2(3-x)(x-4)^2}{(x+3)^2(x-5)} = \\ &= \frac{(x^2-4)^2(x-4)^2}{(x+3)^2}\,\frac{3-x}{x-5} \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dato che la prima frazione è composta da quadrati, il segno è deciso dalla seconda, ovvero si tratta di risolvere, tenendo conto dei denominatori

$$\frac{3-x}{x-5} \geq 0 \ \wedge\ [x\neq -3,\ x\neq 4,\ x\neq 5].$$

Che equivale a risolvere i seguenti sistemi ([4])

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x - 5 > 0, \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} 3 - x \leq 0 \\ x - 5 < 0, \end{cases}$$

$$\wedge\ [x\neq -3,\ x\neq 4,\ x\neq 5].$$

[3]Ricordiamo che risolvere la disequazione $|P(x)|\geq Q(x)$ equivale a risolvere

$$Q(x)<0 \quad \vee \quad \begin{cases} Q(x)\geq 0 \\ P(x)\geq 0 \\ P(x)\geq Q(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} Q(x)\geq 0 \\ P(x)<0 \\ -P(x)\geq Q(x) \end{cases}$$

[4]Ricordiamo lo schema di risoluzione delle disequazioni fratte, cioé risolvere

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$$

equivale a risolvere

$$\begin{cases} P(x)\geq 0 \\ Q(x)>0 \end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases} P(x)\leq 0 \\ Q(x)<0 \end{cases}$$

Il primo sistema non ammette soluzioni, di conseguenza risulta $B = [3,\, 5) \setminus \{4\}$. Tenuto conto dei risultati ottenuti

$$A \cup B = (-\infty, 2] \cup \{[3, 5) \setminus \{4\}\}.$$

$$\sup(A \cup B) = 5, \quad \inf(A \cup B) = -\infty.$$

$$A \cap B \,=\, \emptyset.$$

$$A \setminus B = A$$

$$\sup(A \setminus B) = \sup A = 2, \text{ (che è anche massimo)} \qquad \inf(A \setminus B) \,=\, -\infty.$$

Problema 2. Risolvere l'equazione

$$z^4 + (1+i)^5 z^2 + 16 e^{i\pi/2} = 0 \tag{5}$$

nel campo complesso.

Calcoliamo $(1+i)^5$ scrivendo il numero complesso $(1+i)^5$ in forma trigonometrica.

$$1 + i \,=\, \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \,+\, \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Applicando la *formula di De Moivre* ([5]) si ha

$$(1+i)^5 \,=\, 2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\frac{5\,\pi}{4} \,+\, \sin\frac{5\,\pi}{4}\right) \,=\, -\,4\,(1+i).$$

Osserviamo inoltre che per definizione di *esponenziale complesso*([6]) si ha

$$e^{i\,\frac{\pi}{2}} \,=\, \cos\frac{\pi}{2} \,+\, i\,\sin\frac{\pi}{2} \,=\, i.$$

Sostituendo nell'equazione (5) otteniamo l'equazione biquadratica

$$z^4 \,-\, 4(i+i)z^2 + 16i \,=\, 0, \tag{6}$$

che risolviamo riconducendoci ad un'equazione del secondo ordine ponendo $w = z^2$,

$$w^2 \,-\, 4(i+i)w + 16i \,=\, 0. \tag{7}$$

La formula risolutiva (ridotta) fornisce

$$w_{1,2} \,=\, 2(1+i) \,\pm\, \sqrt{4(1+i)^2 - 16i} = 2(1+i) \pm \sqrt{-8i} \,=\, 2(1+i) \pm 2\sqrt{2}\sqrt{-i} = \begin{cases} -4 \\ \\ -4i \end{cases} \tag{8}$$

Perché applicando la formula per il calcolo della radice ennesima di un numero complesso ([7]), essendo

$$-i = \left(\cos\frac{3\pi}{2} \,+\, i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

---

[5]

$$z = \rho(\cos\theta \,+\, i\,\sin\theta) \Longrightarrow z^n = \rho^n(\cos n\theta \,+\, i\sin n\theta)$$

[6]

$$e^{i\theta} \,=\, \cos\theta \,+\, i\,\sin\theta.$$

[7]

$$v = \rho(\cos\theta \,+\, i\,\sin\theta) \Longrightarrow \sqrt[n]{v} = \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + k2\pi}{n} \,+\, i\sin\frac{\theta + k2\pi}{n}\right),\, k = 0, \cdots, n-1\right\}$$

si ha che

$$\sqrt{-i} = \left\{ \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right), \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} \right) \right\}$$

ovvero

$$\sqrt{-i} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \right\}.$$

Tenuto conto della posizione fatta, le soluzioni di (6) si trovano risolvendo

$$z^2 = -4, \quad z^2 = -4i,$$

da cui

$$z_{1,2} = \pm 2i$$

$$z_{3,4} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{2}{\sqrt{2}}(1-i) \right\}.$$

Problema 3.

(a) Dimostrare la seguente eguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 3^{k-1}(2k-1)}{k(k+1)} = \frac{3^n - 1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Posto

$$a_n = \frac{3^n - 1}{n+1},$$

determinare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

SOLUZIONE (a).

Procediamo per induzione verificando il primo passo. Se $n = 1$ l'eguaglianza è banalmente verificata perché, al primo membro si ha:

$$\frac{1 + 3^0 \cdot 1}{2} = 1,$$

mentre al secondo membro

$$\frac{3^1 - 1}{1+1} = 1.$$

Verifichiamo ora l'induttività della proposizione dimostrando che da

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 3^{k-1}(2k-1)}{k(k+1)} = \frac{3^n - 1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \tag{9}$$

segue

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1 + 3^{k-1}(2k-1)}{k(k+1)} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+2}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{10}$$

La sommatoria al primo membro di (10) si può esplicitare come segue, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1 + 3^{k-1}(2k-1)}{k(k+1)} = \frac{1 + 3^n[2(n+1)-1]}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 3^{k-1}(2k-1)}{k(k+1)} =$$

(per l'ipotesi induttiva (9))

$$= \frac{1 + 3^n[2n+1]}{(n+1)(n+2)} + \frac{3^n - 1}{n+1} = \frac{3^n(2n+1) + 3^n(n+2) - n - 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{3^n(3n+3) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3^n\,3\,(n+1) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+2}.$$

SOLUZIONE (b).

Si dimostra facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n - 1}{n + 1}} = 3$$

Infatti osserviamo che

$$\lim \sqrt[n]{n+1} = 1,$$

dato che $1 \le \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ ed è noto che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Mentre

$$\lim \sqrt[n]{3^n - 1} = 3,$$

perché

$$\sqrt[n]{3^n - 1} = \sqrt[n]{3^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{1 - \frac{1}{3^n}} = 3\,\sqrt[n]{1 - \frac{1}{3^n}},$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{3^n}} = 1,$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

Oppure anche per il teorema del confronto, tenuto conto di $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, dato che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, si ha

$$\frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{3^n} \le 1,$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le \sqrt[n]{1 - \frac{1}{3^n}} \le 1.$$

RISULTATI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA B

Esercizio 1.

Procedendo come nella soluzione dell'Esercizio 1 della Fila A.

$$\frac{(x^2-16)^2(x+3)^2}{(x+1)^2}\,\frac{1-x}{x-2} \ge 0 \quad \wedge [x \ne -1,\, x \ne -3].$$

Da questa si deduce $B = [1,2) \cup \{4\}$.

$$A = \{x:\ x \le -4\},\ B = \{x:\ 1 \le x < 2\} \cup \{4\}$$

$$\sup(A\cup B) = 4 \text{ (è anche massimo)}, \quad \inf(A\cup B) = -\infty, \quad A\cap B = \emptyset.$$

$$A\setminus B = A \Longrightarrow \sup(A\setminus B) = \sup A = -4 \text{ (è anche massimo)},\ \inf(A\setminus B) = -\infty.$$

Esercizio 2

Semplificando i termini, l'equazione si scrive nella forma

$$z^4 + 4(1+i)z^2 - 16i = 0.$$

Posto $w = z^2$, otteniamo l'equazione di secondo grado in w che risolta fornisce le soluzioni

$$w_1 = 2(\sqrt{3}-1)(1+i), \;\; w_2 = -2(\sqrt{3}-1)(1+i).$$

Tenuto conto della posizione precedente.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}-1}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\
z_2 &= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}-1}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)\\
z_3 &= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}-1}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)\\
z_4 &= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}-1}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

RISULTATI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA C

Esercizio 1.

Procedendo come nella soluzione dell'Esercizio 1 della Fila A.

$$\frac{(x^2-1)^2(x-4)^2}{x^2}\,\frac{3-x}{x} \geq 0 \quad \wedge [x \neq 4,\, x \neq -3].$$

Da questa si deduce $B = (0,3] \cup \{-1\}$. Mentre

$$A = \{x : \; x \leq -1\}.$$

$$\sup(A \cup B) = 3 \text{ (è anche massimo)}, \quad \inf(A \cup B) = -\infty,$$

$$A \cap B = \{-1\}, \;\; \max A \cap B = -1, \;\; \min A \cap B = -1$$

$$A \setminus B = (-\infty, -1), \;\; \sup(A \setminus B) = -1, \quad \text{non è massimo}, \;\; \inf(A \setminus B) = -\infty.$$

Esercizio 2

Semplificando i termini, l'equazione si scrive nella forma

$$z^4 + 4(1-i)z^2 - 16i = 0.$$

Posto $w = z^2$, otteniamo l'equazione di secondo grado in w che risolta fornisce le soluzioni

$$w_1 = 4i, \;\; w_2 = -4.$$

Tenuto conto della posizione precedente.

Se $z^2 = 4i$ allora applicando la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso:

$z_{1,2} = \pm 2(1+i)$

Se $z^2 = -4$ allora $z_{3,4} = \pm 2i$.

RISULTATI DEGLI ESERCIZI DELLA FILA D

Esercizio 1.

Procedendo come nella soluzione dell'Esercizio 1 della Fila A.

$$\frac{(x^2-16)^2(x+1)^2}{(x+2)^2}\,\frac{x-2}{x-3} \geq 0 \quad \wedge [x \neq -2,\, x \neq -1].$$

Da questa si deduce $B = \{x : \; x > 3 \;\; \vee \;\; x \leq 2\} \setminus \{-2, -1\}$. Mentre

$$A = \{x : \; x \leq -4\}.$$

$$A \cup B = B, \;\; \sup(A \cup B) = +\infty, \quad \inf(A \cup B) = -\infty,$$

$$A \cap B = A, \;\; \sup A = -4 \text{ (che è anche massimo)}, \;\; \inf A \; = \; -\infty.$$

$$A \setminus B = \emptyset.$$

Esercizio 2

Semplificando i termini, l'equazione si scrive nella forma

$$z^4 + 4(-1+i)z^2 + 16i = 0.$$

Posto $w = z^2$, otteniamo l'equazione di secondo grado in w che risolta fornisce le soluzioni

$$w_1 = 2(1+\sqrt{3})(1-i), \;\; w_2 = 2(1-\sqrt{3})(1-i).$$

Tenuto conto della posizione precedente.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\sin\frac{7\pi}{8}\right)\\
z_2 &= \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{3}}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\sin\frac{15\pi}{8}\right)\\
z_3 &= \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\sin\frac{7\pi}{8}\right)\\
z_4 &= \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\sin\frac{15\pi}{8}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$