Analisi Matematica I - Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta del 12 Giugno 2012

Risoluzione degli esercizi proposti

1) Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{h} = 3^n$$

Svolgimento
Applichiamo la formula di Newton della potenza ennesima di un binomio

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} 1^h 1^{k-h} = (1+1)^k = 2^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$

2) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & -2 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{2\,a_n}{a_n^2 + 6a_n + 7} \end{cases}$$

converge e calcolarne il limite.

Svolgimento
Osserviamo che $a_0 = -2$, $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{8}{47}$. Verifichiamo se la successione è decrescente quando $n \geq 1$, ossia per ogni $n \geq 1$ risulta $a_n > a_{n+1}$.

$$a_n > a_{n+1} \iff a_n > \frac{2\,a_n}{a_n^2 + 6a_n + 7} \iff 2 < a_n^2 + 6a_n + 5.$$

Il polinomio $x^2 + 6x + 5$ risulta maggiore di zero per valori di x esterni all'intervallo delle sue radici $-\frac{5}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Quindi le maggiorazioni sopra sono verificate perché per ogni $n \geq 1$ risulta $a_n > 0$ (segue da un semplice ragionamento induttivo). La successione è monotona decrescente e limitata inferiormente quindi, per il teorema di regolarità delle successione monotone, converge ad un valore $L \in \mathbb{R}$. Calcoliamo questo valore passando al limite nella relazione che definisce a_n:

$$L = \frac{2\,L}{L^2 + 6L + 7}$$

Le soluzioni sono

$$L_1 = 0,\ L_2 = -\frac{5}{2},\ L_3 = -\frac{1}{2}.$$

I valori negativi si scartano perché non sono punti di accumulazione per la successione, quindi il limite cercato è $L_1 = 0$.

3) Determinare i numeri complessi z tali che

$$z^5\,(\overline{z})^2 \;=\; 2i\,|z|^2.$$

Svolgimento

$z=0$ è una soluzione dell'equazione, cerchiamo soluzioni diverse da zero considerando il modulo del primo e del secondo membro dell'equazione:

$$|z^5\,(\overline{z})^2| \;=\; |2i\,|z|^2| \iff |z^5|\,|(\overline{z})^2| \;=\; |2i|\,|z|^2 \iff |z|^7 \;=\; 2\,|z|^2 \iff |z|^5 \;=\; 2 \iff |z| = \sqrt[5]{2}.$$

Sostituiamo nell'equazione

$$z^5\,(\overline{z})^2 \;=\; 2i\,|z|^2 \iff z^3\,z^2(\overline{z})^2 = 2i\,2^{\frac{2}{5}} \iff z^3|z|^4 = 2i\,2^{\frac{2}{5}} \iff z^3 = 2^{\frac{3}{5}}i.$$

Le soluzioni sono le radici terze del numero al secondo membro che scritto in forma trigonometrica ha la seguente espressione

$$2^{\frac{3}{5}}i = 2^{\frac{3}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Applichiamo la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso ottenendo le soluzioni cercate

$$z_{1,2,3} = \left\{z^{\frac{1}{5}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right], k=0,1,2\right\} = \left\{2^{\frac{1}{5}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right); 2^{\frac{1}{5}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right); -2^{\frac{1}{5}}i\right\}.$$