Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 30 Giugno 2012

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.

(1) (Punti 8) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso:

$$\begin{cases} w^5 & = & 2\overline{z} \\ \dfrac{w^5}{z} & = & 2i \\ |z| & = & 2\sqrt{2} \\ Re\, z > 0. \end{cases}$$

(2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \,=\, x\, e^{\frac{2}{2|x|-3}},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{(e^{2x} \,-\, 100\, e^{-2x})^2}\; dx$$

(4) (Punti 8) Stabilire il comportamento della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\, x^n \,+\, \frac{1}{n} \right)^5$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) (Punti 8) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso:

$$\begin{cases} w^5 & = & 2\overline{z} \\ \dfrac{w^5}{z} & = & 2i \\ |z| & = & 2\sqrt{2} \\ Re\, z > 0. \end{cases}$$

Svolgimento

Poniamo $z = x + iy$, con $x,\, y \in \mathbb{R}$, e sostituiamo nelle equazioni date.

$$\begin{cases} w^5 & = & 2(x - iy) \\ w^5 & = & 2i(x + iy) \\ \sqrt{x^2 + y^2} & = & 2\sqrt{2} \\ x > 0. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$$x - iy = x + iy \iff x + y - i(x + y) = 0 \iff x = -y.$$

Quindi z ha la forma $z = -y(1 - i)$ da cui, essendo $|z| = |y|\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, ricaviamo $|y| = 2$. Tenuto conto anche dell'ultima disequazione del sistema si ha $z = 2(1-i)$. Sostituiamo nella seconda equazione del sistema ottenendo $w^5 = 4(-1 - i)$. Per calcolare il valore di w calcoliamo le radici quinte di $4(-1 - i)$ applicando la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso. Per questo passiamo alla forma trigonometrica

$$4(-1 - i) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

ed otteniamo

$$w_{0,1,2,3,4} = \left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{5}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$$

Le soluzioni sono date dalle coppie

$$(2(1 - i); w_0);\ \ (2(1 - i); w_1);\ \ (2(1 - i); w_2);\ \ (2(1 - i); w_3);$$

(2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{2}{2|x|-3}},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Campo di esistenza: $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$.

Comportamento agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) == \infty;\ \lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) = 0.\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Asintoti.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{2}{2|x|-3}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{2}{2|x| - 3 + o\left(\frac{2}{2|x|-3}\right)}\right] = \pm 1.$$

La funzione ammette come asintoto per x che tende a $\pm\infty$ la retta di equazione $y = x + 1$.
Studio della monotonia mediante la derivata prima. dato che la funzione ` dispari possiamo restringere il suo studio alla semiretta $x \geq 0$. Quindi

$$f'(x) = e^{\frac{2}{2x-3}} - xe^{\frac{2}{2x-3}}\frac{4}{(2x-3)^2} = e^{\frac{2}{2x-3}}\frac{4x^2 - 16x + 9}{(2x-3)^2}.$$

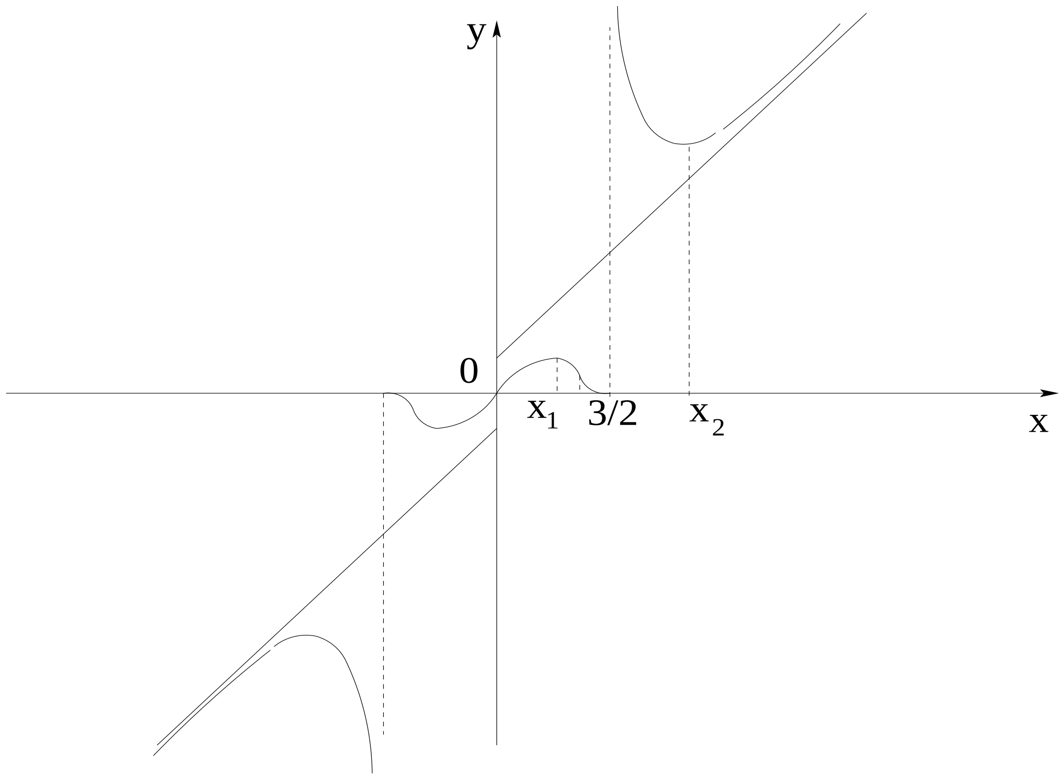
Risulta che $f'(x) = 0$ nei punti

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{2},\ \ x_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{2}$$

Quindi $f'(x) > 0$ per $x \in (0, x_1)$ oppure $x > x_2$, mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1, \frac{3}{2})$ oppure $x \in (\frac{3}{2}, x_2)$. Di conseguenza la funzione risulta crescente sull'intervallo $(0, x_1)$ oppure $(x_2, +\infty$, decrescente su $(x_1, \frac{3}{2})$ oppure $(\frac{3}{2}, x_2)$. Il punto x_1 é punto di massimo relativo, mentre x_2 é di minimo relativo.
Procediamo alla determinazione degli intervalli di concavità e convessit'ella funzione mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = e^{\frac{2}{2x-3}}\frac{8(x+1)}{(2x-3)^3}.$$

Si vede facilmente che $f''(x) > 0$ per $x > \frac{3}{2}$, mentre $f''(x) < 0$ per $0 < x < \frac{3}{2}$. La funzione non ammette flessi. Tenuto conto di quanto trovato e della disparità di f possiamo tracciare il seguente grafico:



(3) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{(e^{2x} - 100\, e^{-2x})^2}\ dx$$

Svolgimento.
Possiamo scrivere

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{(e^{2x} - 100\, e^{-2x})^2}\ dx == \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^{4x}}{(e^{2x} - 100)^2}\ dx.$$

Consideriamo il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^{4x}}{(e^{2x} - 100)^2}\ dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}\, 2\, e^{2x}}{(e^{2x} - 100)^2}\ dx.$$

Ponendo $t = e^{2x}$, quindi $dt = 2e^{2x}\, dx$, ci riconduciamo a calcolare

$$\int \frac{t}{(t^2 - 100)^2}\ dt = \int \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2 - 100)^2}\ dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2 - 100} + C.$$

Possimo quindi scrivere

$$\int \frac{e^{2x}\, 2\, e^{2x}}{(e^{2x} - 100)^2}\ dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{e^{4x} - 100} + C.$$

In conclusione

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{(e^{2x} - 100\, e^{-2x})^2}\ dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{e^{4x} - 100} + C \right]_{\log 2}^{\log 3} =$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{e^{4 \log 3} - 100} - \frac{1}{e^{4 \log 2} - 100} \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{19} + \frac{1}{84} \right) = \frac{65}{6384}.$$

(4) (Punti 8) Stabilire il comportamento della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\, x^n \,+\, \frac{1}{n} \right)^5$$

Svolgimento

Nello svolgimento dell'esercizio è bene ricordare che

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x > 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad x \leq -1. \end{cases}$$

Se $x \geq 0$ la serie è, ovviamente, a termini positivi. In particolare per $x \geq 1$ si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(n\, x^n \,+\, \frac{1}{n} \right)^5 = +\infty,$$

non è verificata la condizione necessaria per la convergenza di una serie (ossia il termine generela è infinitesimo) quindi diverge.

Sia $x \in [0, 1)$. Applichiamo il criterio del confronto asintotico, confrontando il termine generale della serie con il termine generale di una serie armonica del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(n\, x^n \,+\, \frac{1}{n} \right)^5}{\frac{1}{n^5}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^5} \left(n^2 x^n \,+\, 1 \right)^5}{\frac{1}{n^5}} = 1.$$

Perché $\lim_{n \to +\infty} n^2 x^n = 0$ se $|x| < 1$ (limite notevole).

Nello stesso modo si procede nel caso che $x \in (-1, 0)$ perché risulta che, per n grande si ha che $nx^n < 1$ in quanto $\lim_{n \to +\infty} nx^n = 0$. Di conseguenza la serie è, definitivamente, a termini positivi e quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, nello stesso modo fatto, ottenendo che converge.

Se $x \leq -1$ allora $\lim_{x \to +\infty} \left(n\, x^n \,+\, \frac{1}{n} \right)^5$ non esiste perché la sottosuccessione dei termini con indice pari diverge a $+\infty$, mentre quella con indici dispari a $-\infty$. La serie risulta quindi indeterminata.