Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 21 Luglio 2012

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.

(1) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e determinarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & \dfrac{5}{2}, \\ \\ a_{n+1} & = & \dfrac{5 - a_n}{4 - a_n}. \end{cases}$$

(2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x} - 6},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int \arctan \sqrt[4]{x+1}\; dx$$

(4) (Punti 8) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u''(t) \;-\; i\,u'(t) \;-\; \frac{\sqrt{3}}{4}\,i\,u(t) \;=\; 2\,t^2.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e determinarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & \dfrac{5}{2}, \\ a_{n+1} & = & \dfrac{5-a_n}{4-a_n}. \end{cases}$$

Svolgimento

Nell'espressione ricorsiva che definisce la successione non compare la variabile n in maniera esplicita, possiamo quindi considerare la funzione associate e stabilire il suo comportamente al fine di avere una facilitazione dello studio dell'andamento di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Infatti considerando

$$f(x) = \frac{5-x}{4-x},$$

si ha

$$a_{n+1} = f(a_n). \tag{1}$$

Dato che $f'(x) = \dfrac{1}{(4-x)^2}$, si ha $f'(x) > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Quindi La funzione f é monotona crescente. Ritornando alla successione osserviamo che

$$a_1 = \frac{5}{2}, \;\; a_2 = \frac{5}{3}, \text{ quindi } a_1 > a_2.$$

Dimostriamo, per induzione, che la successione é monotona decrescente. Il primo passo è quello esposto sopra. Verifichiamo l'induttività della proposizione, ossia

$$a_n > a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} > a_{n+2}.$$

Per (1) questo equivale a

$$a_n > a_{n+1} \Longrightarrow f(a_n) > f(a_{n+1})$$

Che è verificata perché, per quanto dimostrato sopra, f è crescente (quindi "conserva l'ordine"). La successione è inoltre ben definita perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n < 4$. Infatti, essendo la successione decrescente,

$$a_n < a_{n-1} < \cdots < a_2 < a_1 < 4.$$

La successione è limitata inferiormente perché, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, infatti:

$$a_{n+1} = \frac{5-a_n}{4-a_n} > 0 \iff 5 - a_n > 4 - a_n.$$

Per il teorema di regolarità delle sucessioni monotone ammette limite $L \in \mathbb{R}$ che possiamo determinare risolvendo l'equazione ricavata dalla relazione ricorsiva che definisce la successione.

$$L = \frac{5-L}{4-L} \Longrightarrow L_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \;\; L_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

La soluzione $L_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ si scarta perché L_2 non è punto di accumulazione per la successione essendo $a_1 < L_2$. Quindi il limite della successione è $L_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

(2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \; = \; \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}-6},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Campo di esistenza: $\{x : \ x \geq 0, \ x \neq 36\}$. Limiti agli estremi del C. E.:

$$\lim_{x \to 36^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 36^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ricerca di eventuali asintoti.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \ \ q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3} + 6x}{\sqrt{x} - 6} = +\infty.$$

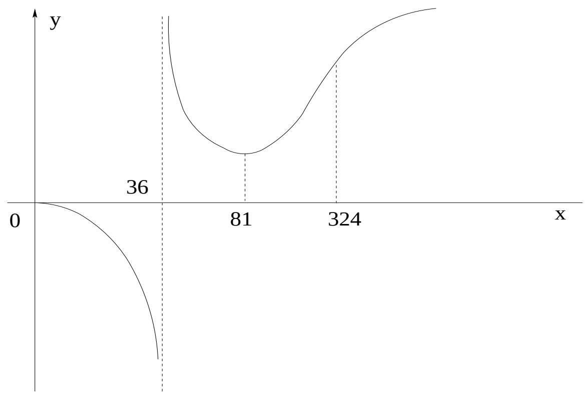
Non esistono asintoti obliqui.
Determinazione degli intervalli di monotonia mediante la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 6)^2},$$

Risulta $f'(x) > 0$ per $x > 81$, $f'(x) < 0$ per $x < 81$. Quindi il punto x_0 è di minimo relativo. La funzione f decresce sugli intervalli $[0, 36)$ e $(36, 81)$, cresce su $(81, +\infty)$. Determinazione degli intervalli di concavità e convessità mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{3(18 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 6)^3}.$$

Si ha che $f''(x) > 0$ per $x \in (36, 324)$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in [0, 36)$ e $x \in (324, +\infty)$. La funzione sarà quindi convessa sull'intervallo $(36, 324)$, e concava su $[0, 36)$ e $(324, +\infty)$. Il punto $x_1 = 324$ è punto di flesso. Possiamo tracciare il seguente grafico.



(3) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int \arctan \sqrt[4]{x+1} \; dx$$

Svolgimento

Effettuiamo il cambiamento di variabile
$$\sqrt[4]{x+1} = t,$$
da cui:
$$x = t^4 - 1, \;\; dx = 4t^3 \; dt.$$
Sostituendo nell'integrale e integrando per parti si ha
$$\int 4\,t^3 \; \arctan t \;\; dt = t^4 \; \arctan t - \int \frac{t^4}{1+t^2} \; dt =$$
$$= t^4 \; \arctan t - \int \frac{t^4-1}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \; dt = t^4 \; \arctan t - \int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \; dt =$$
$$= t^4 \; \arctan t - \int t^2 \;\; dt \; + \int 1 \; dt \; + \int \frac{1}{1+t^2} \; dt = t^4 \; \arctan t - \frac{1}{3}\,t^3 \; + \; t \; - \arctan t =$$
$$= (x+1) \; \arctan \sqrt[4]{x+1} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{x+1} - \arctan \sqrt[4]{x+1} + C =$$
$$= x \; \arctan \sqrt[4]{x+1} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{x+1} + C.$$

(4) (Punti 8) Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$u''(t) \; - \; i\,u'(t) \; - \; \frac{\sqrt{3}}{4}\,i\,u(t) \; = \; 2\,t^2.$$

Svolgimento

Detreminiamo le radici dell'equazione omogenea risolvendo il polinomio caratteristico associato ad essa:
$$\lambda^2 - i\lambda - \frac{\sqrt{5}}{4} i \; = \; 0.$$
Le soluzioni sono
$$\lambda_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{-1+\sqrt{3}i}}{2}.$$
Determiniamo $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$ mediante la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso esprimendolo in forma trigonometrica:
$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$
quindi
$$\sqrt{-1+\sqrt{3}i} = \left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right], k=0,\,1\right\} = \left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right);\; \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}.$$
Da queste si deduce che le radici del polinomio caratteristico sono
$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right);\; \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$
Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è
$$V_0 = \left\{C_1\, e^{t\left[\frac{\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]} + C_2\, e^{-t\left[\frac{\sqrt{2}}{4}-i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]},\; C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Determiniamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo

$$u_f(t) = At^2 + Bt + C, \;\; A,\, B,\, C \in \mathbb{C}.$$

Al fine di determinare le costanti A, B, C calcoliamo le derivate di u_f, ovvero $u'(t) = 2At + B$, $u''(t) = 2A$ e sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$2A - i2At - iB - \frac{\sqrt{3}}{4} iAt^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} iBt - \frac{\sqrt{3}}{4} iC = 2t^2.$$

Da cui, eguagliando i coefficienti delle potenze di t di egual grado del primo e del secondo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2A - iB - i\frac{\sqrt{3}}{4}C = 0 \\ \\ -2Ai - \frac{\sqrt{3}}{4} iB = 0 \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{4} iA = 2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{8i}{\sqrt{3}}; \\ \\ B = -\dfrac{64}{3} i; \\ \\ C = -\dfrac{64}{3} + \dfrac{256}{3\sqrt{3}} i. \end{cases}$$

Quindi nsieme delle soluzioni dell'equazione assegnata é dato da

$$u(t) = C_1\, e^{t\left[\frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]} + C_2\, e^{-t\left[\frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]} + \frac{8i}{\sqrt{3}}\, t^2 - \frac{64}{3}\, it - \frac{64}{3} + \frac{256}{3\sqrt{3}} i, \; C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}.$$