Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 18 Febbraio 2012

FILA 2

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.
Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\log(1+x^4)-\sin^2 x^2}.$$

(2) Data la funzione

$$f(x)=\log(2x^2+3x+5),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Studiare al variare di $x\in\mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5+4}{n^6+5}\ (x+7)^n.$$

(4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u'(t)=\frac{e^{\tan^5 u(t)}}{\tan^4 u(t)}\ \cos^2 u(t)\ e^{\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)}(t^2+5).$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\log(1+x^4)-\sin^2 x^2}.$$

Svolgimento

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Da $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$, posto $t=x^3$ si ottiene $e^{x^3} = 1+x^3+\frac{1}{2}x^6+o(x^6)$, che sosttuito al numeratore, fornisce

$$e^{x^3}-1-x^3 = \frac{1}{2}x^6+o(x^6).$$

Consideriamo gli sviluppi di Taylor dell'espressione al denominatore.
$\sin^2 t = [t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3)]^2 = t^2-\frac{1}{3}t^4+o(t^4)$, che per $t=x^2$ diventa
$\sin^2 x^2 = x^4-\frac{1}{3}x^8+o(x^8)$.
Mentre da $\log(1+t) = t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$, per $t=x^4$ si ha $\log(1+x^4) = x^4-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)$. Sostituendo

$$\log(1+x^4)-\sin^2 x^2 = -\frac{1}{6}x^8+o(x^8).$$

Tenuto conto degli sviluppi ottenuti, il limite diventa

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2}x^6+o(x^6)}{-\frac{1}{6}x^8+o(x^8)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2}x^6}{-\frac{1}{6}x^8} = -\infty.$$

Nel passaggio sopra abbiamo utlizzato il principio di sostituzione degli infinitesimi.

(2) Data la funzione

$$f(x) = \log(2x^2+3x+5),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di esistenza di f é $\mathbb{R}$ in quanto per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha $2x^2+3x+5>0$. I limiti agli estremi del C.E. sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

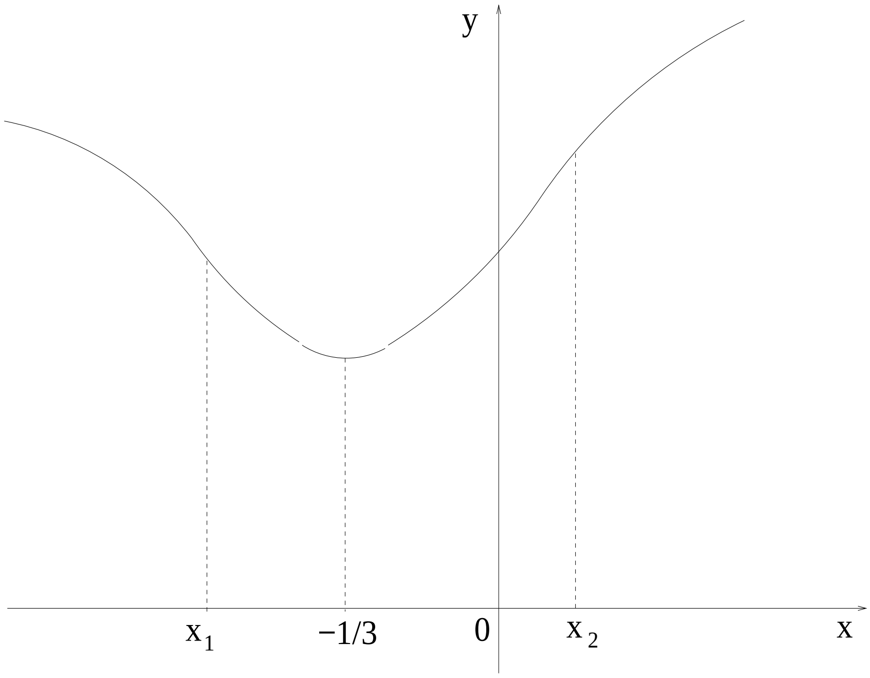
Non esistono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

$$f'(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -\frac{3}{4}$. Quindi la funzione é crescente sull'intervallo $(-\frac{3}{4}, +\infty)$ e decrescente su $(-\infty, -\frac{3}{4})$. Ne segue che $x_0 = -\frac{3}{4}$ ṕunto di minimo relativo.
Calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavitá o convessitá di f.

$$f''(x) = \frac{-8x^2 - 12x + 11}{(2x^2 + 3x + 5)^2}$$

Osserviamo che $f''(x) = 0$ per $x_1 = \frac{-3-\sqrt{31}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{31}-3}{4}$, inoltre $f''(x) > 0$ sull'intervallo (x_1, x_2) e $f''(x) < 0$ fuori di esso. La funzione risulta di conseguenza convessa su (x_1, x_2), concava su $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$. I punti x_1 e x_2 sono punti di flesso.
In base a questi risultati possiamo tracciare un grafico approssimato di f.



(3) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5 + 4}{n^6 + 5} \ (x + 7)^n.$$

Svolgimento
Il segno del termine generale della serie dipende da x. Iniziamo studiando la convergenza assoluta, ovvero consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5 + 4}{n^6 + 5} \ |x + 7|^n,$$

Il cui termine generale é maggiore o uguale a zero. Possiammo quindi applicare il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5 + 4}{n^6 + 5} \ |x + 7|^n} = |x + 7|.$$

Perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{1 + \frac{4}{n^5}}{1 + \frac{5}{n^6}}} = 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente, quindi converge, se $|x+7| < 1$, ovvero se $-8 < x < -6$. Esaminiamo gli altri casi. Se $x+7 > 1$, ovvero $x > -6$, la serie diverge perché é a termini positivi ed il termine generale non é infinitesimo. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+4}{n^6+5}\ (x+7)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{4}{n^5}}{1+\frac{5}{n^6}}\ \frac{(x+7)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(x+7)^n}{n} = +\infty.$$

Perché al numeratore della frazione compare un'esponenziale con base maggiore di uno e quindi é un infinito piú forte dell'infinito al denominatore.
Sia $x+7 = 1$, ovvero $x = -6$. La serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5+4}{n^6+5}.$$

Osserviamo che il numeratore del termine generale tende ad infinito come n^5 mentre il denominatore come n^6, di conseguenza il termine generale tende a zero come $\frac{1}{n}$, quindi la serie é divergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^5+4}{n^6+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n^5+4)}{n^6+5} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, deduciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5+4}{n^6+5}$ si comporta come la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.
Consideriamo il caso $x+7 = -1$, ovvero $x = -8$. In questo caso si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{n^5+4}{n^6+5}.$$

É una serie a termini di segno alterno, possiamo applicare il teorema di Leibniz. Infatti il coefficiente $\frac{n^5+4}{n^6+5}$ é infinitesimo e decrescente ([1]), quindi la serie converge.
Infine se $x+7 < -1$, ovvero $x < -8$, la serie é indeterminata essendo a termini di segno alterno ed avendo il coefficiente non infinitesimo. Infatti date che in questo caso $x+7 = (-1)|x+7|$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{n^5+4}{n^6+5}\ |x+7|^n,$$

e per quanto visto sopra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+4}{n^6+5}\ |x+7|^n = +\infty,$$

perché $|x+7| > 1$.
In conclusione la serie converge per $-8 \le x < -6$, diverge per $x \ge -6$, é indeterminata se $x < -8$.

(4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u'(t) = \frac{e^{\tan^5 u(t)}}{5\tan^4 u(t)}\ \cos^2 u(t)\ e^{\frac{t^3}{3}+5t)}(t^2+5).$$

Svolgimento.
Si tratta di un'equazione differenziale non lineare a variabili separabili. Portiamo al primo membro i termini contenenti la funzione incognita u:

[1] Basta considerare la funzione $f(x) = \frac{x^5+4}{x^6+5}$ e calcolarne la derivata prima $f'(x) = \frac{-x^{10}-24x^5+25x^4}{(x^6++5)^2}$, verificando che essa é negativa. Infatti, per ogni $x \ge 1$, $-x^{10} - 24x^5 + 25x^4 < 0$ perché $25x^4 < x^{10} + 25x^4$, dato che per ogni $x \ge 1$ sono verificate $x^4 \le x^{10}$ e $x^4 \le x^5$.

$$\frac{5\tan^4 u(t)}{\cos^2 u(t)}\ \frac{u'(t)}{e^{\tan^5 u(t)}}\ =\ e^{-(\frac{t^3}{3}+5t)}(t^2+5).$$

Integriamo rispetto a t primo e secondo membro.

$$\int \frac{5\tan^4 u(t)}{\cos^2 u(t)}\ \frac{u'(t)}{e^{\tan^5 u(t)}}\ dt\ =\ \int e^{\frac{-(t^3}{3}+5t)}\ (t^2+5)\ dt.$$

Risolviamo l'integrale del primo membro effettuando il cambiamento di variabili $x = u(t)$, quindi $dx = u'(t)\,dt$.

$$\int \frac{5\tan^4 u(t)}{\cos^2 u(t)}\ \frac{u'(t)}{e^{\tan^5 u(t)}}\ dt\ =\int \frac{5\tan^4 x}{\cos^2 x}\ \frac{1}{e^{\tan^5 x}}\ dx.$$

Si procede ad un nuovo cambio di variabile ponendo $r = \tan x$, per cui $dr = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{5\tan^4 x}{\cos^2 x}\ \frac{1}{e^{\tan^5 x}}\ dx\ =\ \int \frac{5r^4}{e^{r^5}}\ dr\ =\ \int e^{-s}\ ds\ =\ -\ e^{-s}+C.$$

Nell'ultimo integrale il cambiamento di variabile é stato $s = r^5$, e quindi $ds = 5r\,dr$. Tenendo conto di tutte le posizioni fatte:

$$e^{-s}|_{s=r^5} = e^{-r^5},\ \ e^{-r^5}|_{r=\tan x} = e{-}\tan^5 x,\ \ e^{-\tan^5 x}|_{x=u(t)} = e^{-\tan^5 u(t)}.$$

Possiamo in definitiva scrivere

$$\int \frac{5\tan^4 u(t)}{\cos^2 u(t)}\ \frac{u'(t)}{e^{\tan^5 u(t)}}\ dt\ = = -\,e^{-\tan^5 u(t)}+C.$$

Per il calcolo dell'integrale al secondo membro dell'equazione di partenza si pone $s = \frac{t^3}{3}+5t$, $ds = (t+5)\,dt$, ottenendo

$$\int e^{-(\frac{t^3}{3}+5t)}\ dt\ =\ \int e^{-s}\ ds\ =\ -e^{-s}+C = e^{-\frac{t^3}{3}+5t}+C.$$

Eguagliamo le primitive ottenute

$$-e^{-\tan^5 u(t)} = -e^{-(\frac{t^3}{3}+5t)}+C \iff \tan^5 u(t) = -\log\left(e^{-(\frac{t^3}{3}+5t)}+C\right) \iff$$

$$\iff u(t) = -\arctan\sqrt[5]{\log\left(e^{-(\frac{t^3}{3}+5t)}+C\right)}.$$