Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 18 Febbraio 2012

FILA 1

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile. Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\cos x^3 \, - \, 2 + x^6}{\sin^2 x^3 - \log(1 + x^6)}.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \log(3x^2 + 2x + 2),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 2}{n^4 + 1} \, (x - 5)^n.$$

(4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u'(t) = \frac{e^{\tan^3 u(t)}}{1 + \tan^2 u(t)} \, \frac{1}{3\tan^2 u(t)} \, e^{-(\frac{t^2}{2} + 3t)}(t + 3).$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x^3\ -\ 2+x^6}{\sin^2 x^3 - \log(1+x^6)}.$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Da $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$, posto $t = x^3$ si ottiene $\cos x^3 = 1 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{12} + o(x^{12})$, che sosttuito al numeratore, fornisce

$$2\cos x^3 - 2 + x^6 = \frac{1}{12}x^{12} + o(x^{12}).$$

Consideriamo gli sviluppi di Taylor dell'espressione al denominatore.
$\sin^2 t = [t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)]^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$, che per $t = x^3$ diventa
$\sin^2 x^3 = x^6 - \frac{1}{3}x^{12} + o(x^{12})$.
Mentre da $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, per $t = x^6$ si ha $\log(1+x^6) = x^6 - \frac{1}{2}x^{12} + o(x^{12})$. Sostituendo

$$\sin^2 x^3 - \log(1+x^6) = \frac{1}{6}x^{12} + o(x^{12}).$$

Tenuto conto degli sviluppi ottenuti, il limite diventa

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{12}x^{12} + o(x^{12})}{\frac{1}{6}x^{12} + o(x^{12})} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{12}x^{12}}{\frac{1}{6}x^{12}} = \frac{1}{2}.$$

Nel passaggio sopra abbiamo utlizzato il principio di sostituzione degli infinitesimi.

(2) Data la funzione

$$f(x) = \log(3x^2 + 2x + 2),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il campo di esistenza di f é $\mathbb{R}$ in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $3x^2 + 2x + 2 > 0$, essendo $\Delta < 0$. I limiti agli estremi del C.E. sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

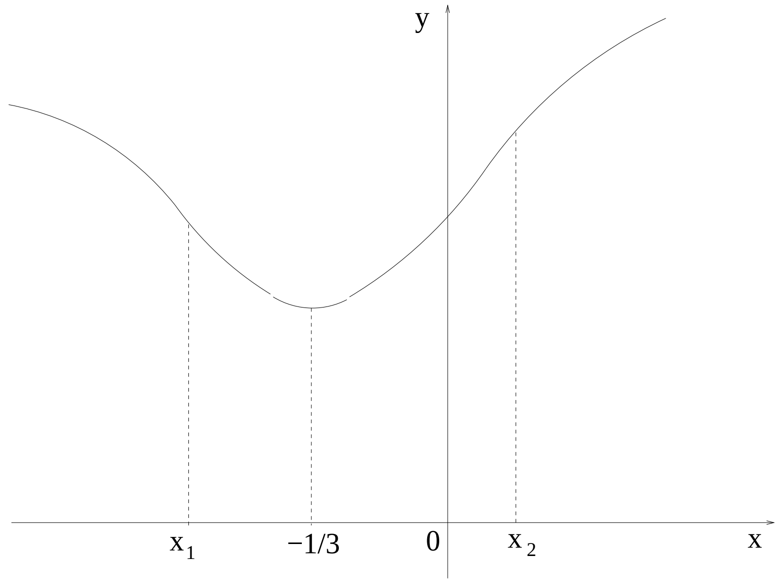
Non esistono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

$$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2 + 2x + 2}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -\frac{1}{3}$. Quindi la funzione é crescente sull'intervallo $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ e decrescente su $(-\infty, -\frac{1}{3})$. Ne segue che $x_0 = -\frac{1}{3}$ ṕunto di minimo relativo.
Calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavitá o convessitá di f.

$$f''(x) = 2\,\frac{-9x^2 - 6x + 4}{(3x^2 + 2x + 2)^2}$$

Osserviamo che $f''(x) = 0$ per $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{3}$, inoltre $f''(x) > 0$ sull'intervallo (x_1, x_2) e $f''(x) < 0$ fuori di esso. La funzione risulta di conseguenza convessa su (x_1, x_2), concava su $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$. I punti x_1 e x_2 sono punti di flesso.
In base a questi risultati possiamo tracciare un grafico approssimato di f.



(3) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}\,(x-5)^n.$$

Svolgimento

Il segno del termine generale della serie dipende da x. Iniziamo studiando la convergenza assoluta, ovvero consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}\,|x-5|^n,$$

Il cui termine generale é maggiore o uguale a zero. Possiammo quindi applicare il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3+2}{n^4+1}\,|x-5|^n} = |x-5|.$$

Perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}}} = 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente, quindi converge, se $|x-5| < 1$. Esaminiamo gli altri casi. Se $x-5 > 1$, ovvero $x > 6$, la serie diverge perché é a termini positivi ed il termine generale non é infinitesimo. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}\ (x-5)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}}\ \frac{(x-5)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(x-5)^n}{n} = +\infty.$$

Perché al numeratore della frazione compare un'esponenziale con base maggiore di uno e quindi é un infinito piú forte dell'infinito al denominatore.
Sia $x-5=1$, ovvero $x=6$. La serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}.$$

Osserviamo che il numeratore del termine generale tende ad infinito come n^3 mentre il denominatore come n^4, di conseguenza il termine generale tende a zero come $\frac{1}{n}$, quindi la serie é divergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3+2}{n^4+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n^3+2)}{n^4+1} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, deduciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}$ si comporta come la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.
Consideriamo il caso $x-5=-1$, ovvero $x=4$. In questo caso si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3+2}{n^4+1}.$$

É una serie a termini di segno alterno, possiamo applicare il teorema di Leibniz. Infatti il coefficiente $\frac{n^3+2}{n^4+1}$ é infinitesimo e decrescente([1]), quindi la serie converge.
Infine se $x-5 < -1$, ovvero $x < 4$, la serie é indeterminata essendo a termini di segno alterno ed avendo il coefficiente non infinitesimo. Infatti date che in questo caso $x-5 = (-1)|x-5|$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3+2}{n^4+1}\ |x-5|^n,$$

e per quanto visto sopra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}\ |x-5|^n = +\infty,$$

perché $|x-5| > 1$.
In conclusione la serie converge per $4 \le x < 6$, diverge per $x \ge 6$, é indeterminata se $x < 4$.

(4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u'(t) = \frac{e^{\tan^3 u(t)}}{1+\tan^2 u(t)}\ \frac{1}{3\tan^2 u(t)}\ e^{-(\frac{t^2}{2}+3t)}(t+3).$$

Svolgimento.
Si tratta di un'equazione differenziale non lineare a variabili separabili. Portiamo al primo membro i termini contenenti la funzione incognita u:

$$\frac{3\ \tan^2 u(t)\,(1+\tan^2 u(t))\ u'(t)}{e^{\tan^3 u(t)}} = e^{\frac{t^2}{2}+3t}.$$

[1] Basta considerare la funzione $f(x) = \frac{x^3+2}{x^4+1}$ e calcolarne la derivata prima $f'(x) = \frac{-x^6-6x^3+3x^2}{(x^4+1)^2}$, verificando che essa é negativa. Infatti, per ogni $x \ge 1$, $-x^6-6x^3+3x^2 < 0$ perché $3x^2 < 6x^3 + x^6$, dato che per ogni $x \ge 1$ sono verificate $x^2 \le x^3$ e $x^2 \le x^6$.

Integriamo rispetto a t primo e secondo membro.

$$\int \frac{3\tan^2 u(t)\,(1+\tan^2 u(t))\ u'(t)}{e^{\tan^3 u(t)}}\,dt \;=\; \int e^{\frac{t^2}{2}+3t}\ dt.$$

Risolviamo l'integrale del primo membro effettuando il cambiamento di variabili $x = u(t)$, quindi $dx = u'(t)\,dt$.

$$\int \frac{3\tan^2 u(t)\,(1+\tan^2 u(t))\ u'(t)}{e^{\tan^3 u(t)}}\,dt \;=\; \int \frac{3\tan^2 x\,(1+\tan^2 x)}{e^{\tan^3 x}}\,dx.$$

Si procede ad un nuovo cambio di variabile ponendo $r = \tan x$, per cui $dr = (1+\tan^2 x)\,dx$

$$\int \frac{3\tan^2 x\,(1+\tan^2 x)}{e^{\tan^3 x}}\,dx = \int \frac{3r^2}{e^{r^3}}\,dr \;=\; \int \frac{1}{e^s}\,ds = \int e^{-s}\ ds = -e^{-s} + C.$$

Nell'ultimo integrale il cambiamento di variabile é stato $s = r^3$, e quindi $ds = 3r^2\,dr$. Tenendo conto di tutte le posizioni fatte:

$$e^{-s}|_{s=r^3} = e^{-r^3},\ \ e^{-r^3}|_{r=\tan x} = e{-}\tan^3 x,\ \ e^{-\tan^3 x}|_{x=u(t)} = e^{-\tan^3 u(t)}.$$

Possiamo in definitiva scrivere

$$\int \frac{3\tan^2 u(t)\,(1+\tan^2 u(t))\ u'(t)}{e^{\tan^3 u(t)}}\,dt \;=\; -e^{-\tan^3 u(t)} + C.$$

Per il calcolo dell'integrale al secondo membro dell'equazione di partenza si pone $s = \frac{t^2}{2} + 3t$, $ds = (t+3)\,dt$, ottenendo

$$\int e^{-(\frac{t^2}{2}+3t)}\ dt \;=\; \int e^{-s}\ ds \;=\; -e^{-s} + C = \; -e^{-(\frac{t^2}{2}+3t))} + C.$$

Eguagliamo le primitive ottenute

$$-e^{-\tan^3 u(t)} = -e^{-(\frac{t^2}{2}+3t)} + C \iff \tan^3 u(t) = -\log\left(e^{-(\frac{t^2}{2}+3t))} + C.\right) \iff$$

$$\iff \tan^3 u(t) = -\sqrt[3]{\log\left(e^{-(\frac{t^2}{2}+3t)} + C.\right)} \iff u(t) = -\arctan\sqrt[3]{\log\left(e^{-(\frac{t^2}{2}+3t)} + C.\right)}$$