Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 4 Febbraio 2012

FILA 2

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile. Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) (**Punti 8**) Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w^4\, z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \\ \overline{w} - \overline{z}^2 = 0. \end{cases}$$

(2) (**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{[\log(1+x)]^2 - \sin x^2}.$$

(3)(**Punti 8**) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{4\,x - 1} - \sqrt{9\,x - 2},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) (**Punti 8**) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{12}\,(a_n + 3). \end{cases}$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

(1) (**Punti 8**) Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w^4\,z^2 \;= -2\sqrt{3}+2i, \\ \overline{w}-\overline{z}^2 = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

Dalla seconda equazione del sistema si ricava

$$\overline{w}=\overline{z}^2 \iff w=z^2 \iff w^4=z^8. \tag{1}$$

Sostiuendo nella prima equazione si ottiene

$$z^{10}=-2\sqrt{3}+2i.$$

Risolvere questa equazione equivale a determinare le radici decime del numero complesso $-2\sqrt{3}+2i$. Per fare ció esprimiamo questo numero in forma trigonometrica:

$$-2\sqrt{3}+2i=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Applichiamo la formula per il calcolo delle radici ennesime.

$$z_k=\sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{5}\right)\right],\;\; k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9.$$

Sostituendo in (1)

$$w_k=z_k^2=\sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{5}\right)\right],\;\; k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9.$$

Le soluzioni del sistema sono indefinitiva le coppie $(z_k,\,w_k)$, con $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7$.

(2) (**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x^3}\,-\,1\,-\,x^3}{[\log(1+x)]^2-\sin x^2}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo il polinomio di Taylor per ciascuna delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2),\;\text{ per } t=x^3 \text{ si ha } e^{x^3}=1+x^3+\frac{1}{2}x^6+o(x^6).$$

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o(t^3),\;\text{ per } t=x^2 \text{ si ha } \sin x^2=x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6).$$

$$[\log(1+x)]^2=\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]^2=x^2-x^3+o(x^3).$$

Sostituendo quanto ottenuto nel limite proposto, risulta

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}x^6+o(x^6)}{x^3+o(x^3)}=$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}x^6}{x^3}=0.$$

(3) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{4\,x-1} \;-\; \sqrt{9\,x-2},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esisienza di f é l'insieme $\{x:\; x \geq \frac{1}{4}\}$. Inoltre si verifica facilmente che, per ogni $x \geq \frac{1}{4}$, $f(x) < 0$.
Andamento agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[2\sqrt{1-\frac{1}{4x}} - 3\sqrt{1-\frac{2}{9x}}\right] = -\infty.$$

Nel punto $x_0 = \frac{1}{4}$ la funzione é definita e quindi sia ha $f(x_0) = -\frac{1}{2}$. Esistenza di eventuali asintoti all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}\left[2\sqrt{1-\frac{1}{4x}} - 3\sqrt{1-\frac{2}{9x}}\right] = 0.$$

Non esistono asintoti per x che tende a $+\infty$.
Calcoliamo la derivata prima e determiniamo gli intervalli di monotonia di f.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{4x-1}} - \frac{9}{\sqrt{9x-2}}\right).$$

Da cui ricaviamo che $f'(x) > 0$ per i valori di x che verificano la diseguaglianza:

$$4\sqrt{9x-2} > 9\sqrt{4x-1} \iff x < \frac{49}{180}.$$

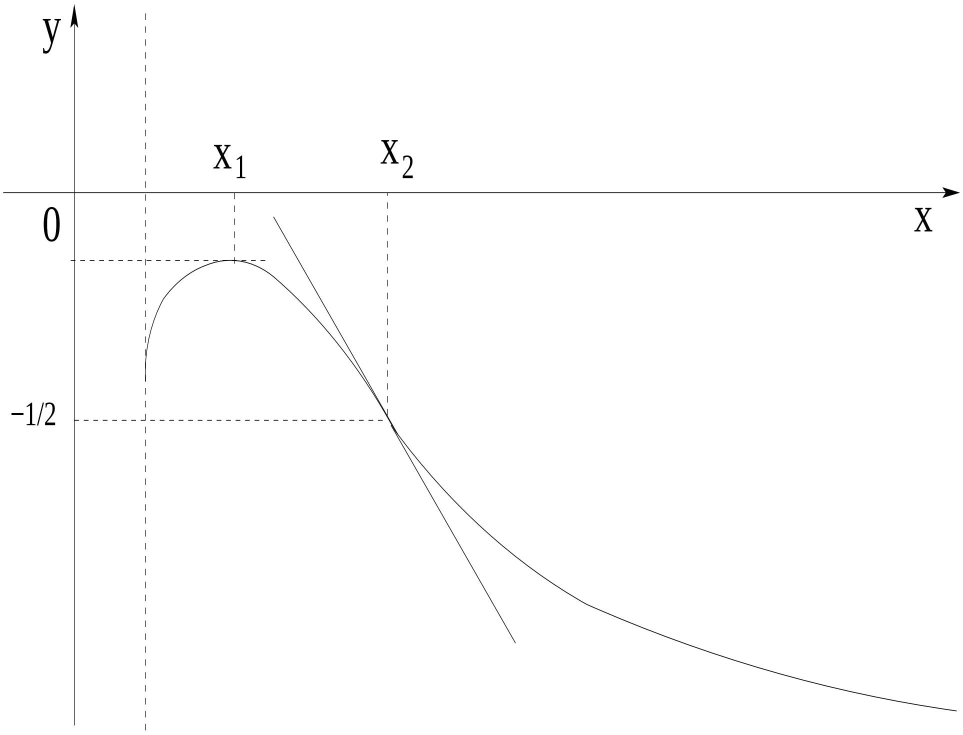
Quindi la funzione risulta crescente sull'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{49}{180}]$ e decrescente sull'intervallo $[\frac{49}{180}, +\infty)$. Quindi il punto $x_1 = \frac{49}{180}$ é punto di massimo relativo che é anche assoluto.
Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá.

$$f''(x) = -\frac{4}{\sqrt{(4x-1)^3}} + \frac{81}{4\sqrt{(9x-2)^3}}.$$

Da questa espressione ricaviamo che $f''(x) > 0$ per i valori di x che verificano la disequazione:

$$16\sqrt{(9x-2)^3} < 81\sqrt{(4x-1)^3} \iff x > \frac{-8\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{9}}{-36\sqrt[3]{4}+49\sqrt[3]{9}}.$$

Di conseguenza la funzione risulta concava nell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{-8\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{9}}{-36\sqrt[3]{4}+49\sqrt[3]{9}}]$ e convessa nell'intervallo $[\frac{-8\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{9}}{-36\sqrt[3]{4}+49\sqrt[3]{9}}, +\infty)$.
Il punto $x_2 = \frac{-8\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{9}}{-36\sqrt[3]{4}+49\sqrt[3]{9}}$. é punto di flesso.
Possiamo a questo punto tracciare un grafico approssimato della funzione.



(4) (**Punti 8**) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 &= 2, \\ a_{n+1} &= \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{12}\,(a_n+3). \end{cases}$$

Svolgimento.
Dimostriamo che la successione é sempre positiva per induzione. $a_1 = 2 > 0$. Verifichiamo l'induttivitá: $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$, perché $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{12}(a_n+3) > 0$ e l'espressione al secondo membro risulta positiva in quanto, per l'ipotesi induttiva, tutti i suoi termini sono maggiori di zero.
La successione é monotona crescente. Procedediamo anche per questa dimostrazione per induzione.
Risulta $a_1 = 2 < a_2 = \frac{10}{3}$, mentre l'induttivitá: $a_{n-1} < a_n$ implica che $a_n < a_{n+1}$, segue da

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}}{12}(a_{n-1}+3) < a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{12}(a_n+3).$$

Infatti essendo la successione a termini positivi, si ha che da $a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} < a_n^2 + 2a_n$ e da $a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_{n-1} + 2 < a_n + 2$ segue $a_{n-1} < a_n \Longrightarrow (a_{n-1}^2 + 2a_{n-1})(a_{n-1}+3) > (a_n^2 + 2a_n)(a_n+3)$.
In definitiva la successione é monotona crescente quindi, per il teorema di regolaritá delle successioni monotone risulta che esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Se L fosse reale lo possiamo calcolare passando al limite nella successione ricorsiva e risolvendo l'equazione ottenuta in questo modo:

$$L = \frac{L^2 + 2L}{12}(L+3).$$

Una soluzione é $L_1 = 0$, le altre sono $L_2 = -6$ e $L_3 = 1$.
Nessuno di questi valori é il limite della successione perché non sono punti di accumulazione per la successione dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \geq 2$, in quanto crescente.
Dato che a_n é crescente e non ha limite reale deve necessariamente divergere a $+\infty$.